مقدمة في العمليات العشوائية

تأليف

أ. د. لطفي تاج

أ. د. عمار محمود علي سرحان

جامعة الملك سعود

النشر العلمي و المطابع

بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمة في العمليات العشوائية

تأليـــف

أ.د. لطفي تاج

الأستاذ بقسم الإحصاء وبحوث العمليات

كلية العلوم - جامعة الملك سعود

أ.د. عمار محمود علي سرحان

الأستاذ بقسم الإحصاء وبحوث العمليات

كلية العلوم - جامعة الملك سعود

النشر العلمي والمطابع - جامعة الملك سعود

ص.ب ٦٨٩٥٣ - الرياض ١١٥٣٧ - المملكة العربية السعودية

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر

تاج، لطفي

مقدمة في العمليات العشوائية/ لطفي تاج؛ عمار محمود علي سرحان – الرياض؛ ١٤٢٨هـ

٤١١ ص، ١٧×٢٤ سم

ردمك ٢- ١٣٤- ٥٥- ٩٩٦٠

١- الأحصاء الرياضي ٢- الأحتمالات (رياضيات) ٣- الرياضيات – بحوث

أ. سرحان، عمار محمود علي (مؤلف مشارك) ب. العنوان

ديوي ٥١٩ ١٤٢٨/٢٢٧٨

رقم الإيداع : ١٤٢٨/٢٢٧٨

ردمك : ٢ - ١٣٤ - ٥٥ - ٩٩٦٠

حكمت هذا الكتاب لجنة متخصصة، شكلها المجلس العلمي بالجامعة، وبعد اطلاع المجلس على تقارير المحكمين، وافق على نشره في اجتماعه الأول للعام الدراسي ١٤٢٧/ ١٤٢٨هـ والمعقود في تاريخ ٢٤/ ٨ / ١٤٢٧هـ الموافق ١٧/ ٩ / ٢٠٠٦م.

النشر العلمي والمطابع ١٤٢٨هـ

مقدمـة

الحمدالله والصلاة والسلام على نبينا محمد صلى الله عليه وعلى آله وصحبه وسلم.

يعتبر هذا الكتاب أساساً لنظرية العمليات العشوائية ولا غنى عنه لطلاب الإحصاء وبحـوث العمليات وبعض أقسام كلية الهندسة.

والكتب العربية التي تعالج موضوع العمليات العشوائية تعتبر نادرة جداً (إن لم تكـن معدومة)؛ لذا نرجو من الله العلي أن يسد بهذا الكتاب بعض النقص الشديد الموجود في هـذا المجال في المكتبة العربية.

ولما كانت الكتابة في موضوع العمليات العشوائية باللغة العربية مازالت في خطواتها الأولى؛ فقد وجدنا بعض الصعوبات في تعريب بعض المصطلحات المستخدمة في العمليات العشوائية، وقد اعتمدنا على معجم المصطلحات العلمية والفنية كمرجع أساسي لتعريب مثل هذه المصطلحات.

يتكون هذا الكتاب من ثلاثة أبواب بالإضافة إلى المقدمة، يتناول الباب الأول سلاسل ماركوف، ويتكون من أربعة فصول، أما الباب الثاني فيتناول عمليات ماركوف ويتكون من ثلاثة فصول، أما الباب الثالث فيعرض بعض التطبيقات للعمليات العشوائية ويتكون من ثلاثة فصول.

ولم نغفل في هذا الكتاب عن تقديم مجموعة كبيرة ومتكاملة من الأمثلة المحلولة بغرض توضيح الأفكار والمفاهيم المطروحة فيه.

وإننا إذ نضع هذا الكتاب بين أيدي الإخوة الزملاء وطلاب العلم والمعرفـة نكـون

شاكرين لهم جميعًا إذا تفضلوا بتزويدنا بأي نقصٍ أو اقتراحٍ بنَّاء يساعدنا في تحسينه مستقبلاً حتى يكون أكثر نفعًا.

يخص كل من المؤلفين زوجه وأبناءه بالشكر الجزيل لاستقطاع بعضٍ من وقتهم في إعداد هذا الكتاب. كما نشكر طلاب وطالبات الماجستير في قسم الإحصاء وبحوث العمليات في العام الدراسي ١٤٢٥/١٤٢٦هـ، نخص بالذكر كلاً من الأستاذ سعد المالكي، والأستاذ نايف الزاحم لتفضلهم بقراءة النسخة الأصلية وإبداء العديد من الملاحظات.

وأخيرًا نسأل الله تعالى أن يجعل هذا العمل خالصًا لوجهه الكريم وأن ينفع به الإسلام والمسلمين والله من وراء القصد وهو يهدي السبيل.

المؤلفان

المحتويات

الصفحة

الباب الثاني: عمليات ماركوف

الفصل الأول

مقدمة

Introduction

تشير دراسة الاحتمال إلى تجربة مكونة من إجراء ومشاهدات. خلال دراسة المتغيرات العشوائية فإن كل مشاهدة تناظر عددا أو أكثر. أما عند دراسة العمليات العشوائية فإن كل مشاهدة يقابلها دالة في الزمن. كلمة عشوائية تعني الاحتمالية أما كلمة عملية فتعني دالة في الزمن. ومن ثم عندما ندرس العمليات العشوائية فإننا ندرس دوال عشوائية في الزمن. غالبا ما تتضمن جميع تطبيقات الاحتمالات مشاهدات متعددة مأخوذة على فترة زمنية. فعلى سبيل المثال، عند دراسة احتمال وقوع حدث ما، فإننا نهتم بتكرارات وقوع هذا الحدث عند إعادة إجراء التجربة عددًا كبيرًا من المرات. نهتم أيضًا بمتتابعة زمنية من الحوادث عند دراسة العمليات العشوائية.

يعتبر هذا الفصل مقدمة قصيرة عن العمليات العشوائية لتقديم فكرة عامة حول ما تعنيه العملية العشوائية وسيتم تدعيم هذه المفاهيم بالأمثلة. كما سنعرض أيضا في هذا الفصل بعض أنواع العمليات العشوائية وخواصها. علمًا بأننا سنتعرض في هذا الكتاب للعمليات العشوائية الأكثر شيوعًا.

(١,١) أمثلة

Examples

غالباً ما تسبب الحوادث العشوائية في وضع شروط على الأنظمة حتى تتغير مع الزمن.

تتسبب الأعطال العشوائية لماكينة ما في تأرجح فترات توقفها من يوم لآخر. وتتسبب عشوائية الطلب على السيارات في تغير سياسة مالك متجر السيارات لتغير الأسعار من أسبوع لآخر. ويتسبب الاضطراب الكهربائي العشوائي في الجو في تذبذب موجات الراديو مما يؤدي إلى سكون المستقبل (توقفه عن العمل). والعمليات التي تتأرجح مع الزمن كنتيجة لحوادث عشوائية مؤثرة في نظام ما تسمى بالعمليات العشوائية. وقبل أن نعرض تعريف العملية العشوائية نقدم الأمثلة التالية:

مثال (١,١)

لنفرض أننا ألقينا زهرة نرد متزنة عددًا من المرات، و نهتم بالعدد الذي يظهر على السطح العلوي للزهرة في الرمية رقم n . ليكن $X(1)$ يرمز إلى العدد الذي يظهر في الرمية الأولى، أما $X(2)$ فيرمز إلى العدد الذي يظهر في الرمية الثانية ، ... وهكذا . وبذلك يمكن وصف هذه التجربة العشوائية بعائلة المتغيرات العشوائية $\{X(n): n \in T\}$ ، حيث إن المتغير العشوائي $X(n)$ يكون عبارة عن العدد الذي يظهر في الرمية رقم n والذي يمكن أن يكون أحد القيم 1، 2، ...، 6 وأن $T = \{1,2,3,...\}$.

عائلة المتغيرات العشوائية $\{X(n): n \in T\}$ تكون عبارة عن مثال لعملية عشوائية، والتي يسمى فيها الرمز n بمعلمة العملية العشوائية.

مثال (١,٢)

تم قياس درجة حرارة الظهيرة عند أحد المطارات يوميًا خلال عام واحد. ليكن $Y(n)$ يرمز للعدد المسجل في اليوم n . بفرض أن عدد أيام العام هو 365 يوماً، فإن العملية $\{Y(n): n \in T\}$ تكون مثالاً لعملية عشوائية وأن $T = \{1,2,3,...,365\}$. لاحظ أنه ليس من الضروري أن تكون قيمة $Y(n)$ في هذا المثال عدداً صحيحاً.

مثال (١,٣)

لنفرض أن عددًا من المرضى ينتظرون الطبيب المعالج في أحد المستشفيات، و ليكن $Q(t)$ يرمز إلى عدد المرضى الذين ينتظرون عند اللحظة الزمنية t . من الواضح أنه عندما

يصل مريض إلى المستشفى قاصدًا ذلك الطبيب فإن قيمة المتغير العشوائي $Q(t)$ تزداد بمقدار الواحد ، أما إذا غادر مريض من هؤلاء المرضى فإن قيمة المتغير $Q(t)$ تتناقص بمقدار الواحد، وهذا يعني أن قيمة المتغير $Q(t)$ تتغير مع الزمن.

في هذا المثال ، عند أي لحظة زمنية t فإن المتغير العشوائي $Q(t)$ يأخذ أحد القيم التالية: 3,2,1,0... ومن ثم فإن عائلة المتغيرات العشوائية $\{Q(t):t \geq 0\}$ تكون مثالاً آخر لعملية عشوائية ذات المعلمة t.

مثال (١,٤)

ليكن $Z(t)$ يرمز إلى منسوب الماء عند أحد السدود عند اللحظة الزمنية t . فإن $\{Z(t):t \geq 0\}$ تكون مثالا آخر لعملية عشوائية، حيث إن المتغير العشوائي $Z(t)$ لا يأخذ بالضرورة قيمًا صحيحة.

(١,٢) تعاريف
Definitions

نقدم فيما يلي تعريف العملية العشوائية وبعض التعاريف المتعلقة بها.

تعريف (١,١)

تسمى عائلة المتغيرات العشوائية $\{X(t):t \geq 0\}$ بالعملية العشوائية stochastic process ذات المعلمة parameter t.

تعريف (١,٢)

تسمى مجموعة القيم الممكنة للمتغير العشوائي $X(t)$ بحالات states العملية العشوائية، كما يمكن أن تسمى بمواقع positions العملية العشوائية. فإذا كان $X(t)=i$ فإنه يقال إن العملية تكون في الحالة i عند اللحظة t.

ففي المثال (١,١) نجد أن حالات العملية العشوائية $\{X(n):n \in T\}$ تكون 1، 2، 3، 4، 5، 6. ويسمى التغير في قيم المتغير العشوائي $X(t)$ بالانتقال بين حالات العملية

العشوائية.

أما في المثال (١,٣) فتكون حالات العملية العشوائية $\{Q(t): t \geq 0\}$ عبارة عن 0، 1، 2، 3، ... .

يمكن أن تكون حالات العملية العشوائية عبارة عن كميات عددية أو غير عددية (وصفية) وذلك بناء على طبيعة العملية العشوائية. ففي نظرية الطوابير، على سبيل المثال، غالبًا ما تكون الحالات عبارة عن عدد الزبائن الذين ينتظرون تقديم الخدمة. أما إذا كنا نهتم بوضع نموذج لدراسة حركة توصيل الأمتعة في نظام لشركة طيران، فإن الحالات في هذا النموذج يمكن أن تكون عبارة عن موضع الأمتعة عند أي لحظة، وهذا يكون عبارة عن مثالٍ لحالات غير عددية. نقوم بتخصيص قيمٍ عددية اختيارية للحالات غير العددية ومن ثم يمكن أن نفكر في أن حالات النظام عند أي لحظة عبارة عن متغير عشوائي عددي.

تعريف (١,٣)

فئة جميع القيم الممكنة للمتغير العشوائي $X(t)$ تسمى بفضاء حالة العملية العشوائية $\{X(t): t \geq 0\}$ state space ويرمز لها بالرمز S .

ففي المثال (١,١) يكون فضاء الحالة هو $S = \{1,2,3,4,5,6\}$. أما في المثال (١,٣) يكون فضاء الحالة هو $S = \{0,1,2,...\}$.

إذا كانت المجموعة S عبارة عن مجموعة منفصلة فإن العملية العشوائية $\{X(t): t \geq 0\}$ تسمى عملية عشوائية ذات فضاء حالة منفصل. وبذلك فإن المثالين (١,١) و (١,٣) يعطيان مثالين لعمليتين عشوائيتين بفضاء حالة منفصل.

إذا كانت المجموعة S عبارة عن مجموعة متصلة ، أي أن $S \subset (-\infty, \infty)$ ، فإن العملية العشوائية $\{X(t): t \geq 0\}$ تسمى عملية عشوائية ذات فضاء حالة متصل. العمليتان العشوائيتان المعرفتان في المثالين (١,٢) و (١,٤) تكونان عمليتين عشوائيتين بفضاء حالة متصل.

تعريف (١,٤)

تسمى مجموعة جميع القيم الممكنة لمعلمة العملية العشوائية $\{X(t): t \geq 0\}$ بفضاء المعلمة (parameter space) ، ويرمز له بالرمز T .

في المثال (١,١) يكون $T = \{1,2,3,...\}$ و في المثال (١,٢) يكون $T = \{1,2, ..., 365\}$. في المثالين (١,٣) و (١,٤) فإن $T = \{t: t \geq 0\} \subseteq [0,\infty)$.

إذا كانت المجموعة T منفصلة فإن العملية العشوائية $\{X(t): t \geq 0\}$ تسمى بعملية عشوائية منفصلة الزمن discrete time stochastic process وفي هذه الحالة يمكن استخدام الرمز n بدلاً من الرمز t ، ويكتب $X(n)$ أو X_n بدلا من $X(t)$ أو X_t .

إذا كانت المجموعة T متصلة، بمعنى $T = \{t: t \geq 0\} \subseteq [0,\infty)$ ، فإن العملية العشوائية $\{X(t): t \geq 0\}$ تسمى بعملية عشوائية متصلة الزمن continuous time stochastic process وفي هذه الحالة يمكن كتابة $X(t)$ على الصورة X_t .

العملية العشوائية في كل من المثالين (١,١) و (١,٢) تكون عملية عشوائية بزمن منفصل. أما العملية العشوائية في كل من المثالين (١,٣) و (١,٤) تكون عملية عشوائية بزمن متصل.

(١,٣) أنواع العمليات العشوائية
Types of stochastic processes

يتضح مما تقدم أنه يوجد لكل عملية عشوائية فضاء حالة S وفضاء معلمة T . إذا كان فضاء الحالة قابل للعد فإن العملية العشوائية تسمى سلسلة chain. علاوة على ذلك، إذا كانت السلسلة لها عدد منتهٍ من الحالات فإنها تكون محدودة. وهذا يقود إلى التصنيف التالي:

١- **سلسلة منفصلة الزمن** Discrete-time chain: كل من S ، T منفصل، كما في المثال (١,١). مثال آخر لهذا النوع هو $\{X(n): n = 0,1,\cdots\}$ حيث إن $X(n)$ يكون عبارة عن عدد أعواد الكبريت في الصندوق رقم n المنتج بواسطة عملية

الإنتاج. إذا كانت السعة العظمى للصندوق هي 100 عود، فإن هذه السلسلة تكون محدودة وفضاء حالتها $S = \{0,1,...,100\}$.

٢- **عملية منفصلة الزمن** Discrete-time process: S متصل، T منفصل، كما في المثال (١,٢). أيضًا لنفرض أن W_n يكون عبارة عن الزمن الذي يجب انتظاره قبل تنفيذ البرنامج رقم n على جهاز كمبيوتر. إذن $\{W_n : n = 0,1,2,...\}$ تكون عملية عشوائية منفصلة الزمن متصلة الحالة.

٣- **سلسلة متصلة الزمن** Continuous-time chain: S منفصل، T متصل، كما في المثال (١,٣). أيضًا، لنفرض أن $N(t)$ يرمز إلى العدد الكلي لزبائن مطعم عند اللحظة t. إذن $\{N(t) : t \in [0,\infty)\}$ تكون سلسلة متصلة الزمن.

٤- **عملية متصلة الزمن** Continuous-time process: كل من S ، T متصل، كما في المثال (١,٤). أيضًا، تكون العملية $\{L(t) : t \in [0,\infty)\}$ عبارة عن عملية عشوائية متصلة الزمن، حيث إن $L(t)$ يكون عبارة عن منسوب الماء عند سد ما في اللحظة الزمنية t. إذا كان أكبر قيمة لمنسوب الماء عند هذا السد هي 50 قدماً، إذن فضاء الحالة لهذه العملية يكون $[0,50]$.

يمكن تلخيص هذه الأنواع الأربعة في الجدول التالي :

جدول (١,١). الأنواع الأربعة للعمليات العشوائية.

	فضاء المعلمة T منفصل (خطوة)	**فضاء المعلمة T متصل (زمن)**
فضاء الحالة S منفصل (سلسلة)	سلسلة منفصلة الزمن (محدودة/غير محدودة) $\{X_n : n = 0,1,2,...\}$	سلسلة متصلة الزمن (محدودة/غير محدودة) $\{N(t) : t \in [0,\infty]\}$
فضاء الحالة S متصل	عملية منفصلة الزمن $\{W_n : n = 0,1,2,...\}$	عملية متصلة الزمن $\{L(t) : t \in [0,\infty)\}$

عمومًا، إذا كان فضاء الحالة منفصلاً وفضاء المعلمة منفصلاً سنكتب $\{X_n : n \in T\}$ بدلاً من $\{X(t) : t \in T\}$. من الآن فصاعدًا سيتم التعامل في بقية هذا الكتاب مع العمليات العشوائية التي لها فضاء حالة منفصل. يمكن أن يكون فضاء الحالة فضاء ثنائياً ، كما في المثال التالي.

مثـــال (١,٥)

اكتب فضاء الحالة وفضاء المعلمة للعملية العشوائية التي تمثل الأهداف المسجلة أثناء لعب مباراة كرة قدم.

الحــــل

لنفرض أن X_t ، Y_t عبارة عن متغيرين عشوائيين يمثلان على الترتيب الأهداف التي سجلها الفريق الأول والفريق الثاني حتى اللحظة t، ومن ثم فإن الزوج (X_t, Y_t) يمثل الأهداف المسجلة في المباراة حتى اللحظة t ، $0 \le t \le 90$. إذن العملية العشوائية التي تمثل هذه الظاهرة هي $\{(X_t, Y_t) : 0 \le t \le 90\}$ والتي يكون فيها فضاء الحالة $S = \{(x, y) : x, y = 0, 1, 2, \ldots\}$ وفضاء المعلمة $T = \{t : 0 \le t \le 90\}$. تبدأ هذه العملية من الحالة $(0,0)$ ثم عندما يُسجل هدف تنتقل إلى الحالة $(1,0)$ إذا كان الفريق الأول هو الذي بدأ بالتسجيل ، أو إلى الحالة $(0,1)$ إذا كان الفريق الثاني هو الذي بدأ بالتسجيل وهكذا، وبشكل عام فإن هذه العملية ستنتقل من الحالة $(x, y) \in S$ إلى أي من الحالتين $(x+1, y) \in S$ إذا سجل الفريق الأول أو إلى الحالة $(x, y+1) \in S$ إذا سجل الفريق الثاني.

يمكن أن تأخذ المتغيرات العشوائية X_1 ، X_2 ، ... أي نوع من الكميات (عددية أو وصفية) كما يمكن أن تكون معتمدة على بعضها أو تكون مستقلة شرطيًا. في المثال التالي تكون المتغيرات العشوائية Y_1 ، Y_2 ،... مستقلة بينما تكون المتغيرات العشوائية X_1 ، X_2 ،... غير مستقلة وجميعها تأخذ كميات عددية.

مثـــال (١,٦)

اختار علي أحد الأسهم التجارية للمضاربة في البورصة السعودية، وأنه في كل يوم

سيكسب ريالاً واحدًا باحتمال 1/2 أو يخسر ريالاً باحتمال 1/2. بفرض أن المتغير X_n هو مكسب علي بعد عدد n من الأيام:

١- أوجد فضاء الحالة و فضاء المعلمة للعملية العشوائية $\{X_n : n \in T\}$.

٢- أثبت أن : $E[X_n] = 0$ ، $Var[X_n] = n$.

الحــــل

١- حيث أن القيم الممكنة للمتغير n تكون 1، 2، 3،... إذن فضاء المعلمة يكون $T = \{1, 2, 3, ...\}$ ، وحيث إن القيم الممكنة للمـــتغير العـــشوائي X_n هـــي 0,±1,±2,...، إذن فضاء الحالة للعملية العشوائية يكون $S = \{0, \pm 1, \pm 2, ...\}$، بالتالي فإن العملية العشوائية $\{X_n : n \in T\}$ تكون عملية عشوائية منفصلة الزمن منفصلة الحالة (سلسلة منفصلة الزمن).

٢- لنفرض أن Y_i متغير عشوائي يمثل مكسب علي في اليوم رقم i، إذن :

$$Y_i = \begin{cases} +1, \text{باحتمال} & \dfrac{1}{2} \\ -1, \text{باحتمال} & \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

وبذلك فإن :

$$Var[Y_i] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \quad ، \quad E[Y_i] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

ولكن X_n يرتبط بـــ Y_i بالعلاقة :

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

إذن:

$$E[X_n] = E\left[\sum_{i=1}^{n} Y_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E[Y_i] = 0$$

وحيث إن المتغيرات العشوائية Y_1 ، Y_2، ... Y_n مستقلة ، إذن:

$$.\,Var[X_n]=\sum_{i=1}^{n}Var[Y_i]=\sum_{i=1}^{n}1=n$$

نقدم الأمثلة الثلاث التالية حتى يتمكن القارئ من فهم تصور العمليات العشوائية وفضاء الحالة وفضاء المعلمة فهمًا جيدًا.

مثــال (١,٧)

لنفرض أننا ألقينا قطعتي عملة معًا خمسين مرة، ونفترض أننا سننجح إذا ظهر على سطحي القطعتين نفس الشيء (كتابة أو صورة) ونفشل خلاف ذلك. ليكن X_n هو عدد مرات النجاح حتى الرمية رقم n. هذه اللعبة تمثل بعملية عشوائية $\{X_n : n\in T\}$ منفصلة الزمن منفصلة الحالة، حيث إن: $T=\{1,2,\ldots,50\}$، $S=\{0,1,2,\ldots,50\}$.

مثــال (١,٨)

لنفرض أن لدينا صندوقين أ ، ب وأننا وضعنا فيهما ثلاث كرات بيضاء وخمس كرات خضراء بشرط أن يحتوي كل منهما على أربع كرات. وبفرض أننا أجرينا عملية سحب متكررة من الصندوقين، وفي كل عملية نقوم بسحب كرة عشوائيًا من كل صندوق ثم نقوم بعكس موضعي الكرتين (نضع الكرة المسحوبة من الصندوق أ في الصندوق ب، والعكس). ليكن X_n هو عدد الكرات البيضاء في الصندوق أ بعد إجراء عملية السحب رقم n. من الواضح أن $\{X_n : n\in T\}$ تكون عملية عشوائية منفصلة الزمن منفصلة الحالة، حيث إن: $T=\{1,2,3,\ldots\}$، $S=\{0,1,2,3\}$. بالمثل إذا كان Y_n هو عدد الكرات الخضراء في الصندوق أ بعد إجراء عملية السحب رقم n، فإن $\{Y_n : n\in T\}$ تكون عملية عشوائية منفصلة الزمن منفصلة الحالة، حيث إن: $T=\{1,2,3,\ldots\}$، $S=\{1,2,3,4\}$.

مثــال (١,٩)

لدينا عدد من الطلاب المقبولين للدراسة في جامعة الملك سعود كل عام، علما بأن جامعة الملك سعود فتحت عام 1957. ليكن $X(1957)$ يرمز إلى عدد الطلاب المقبولين في

الجامعة في عام 1957 وأن $X(1958)$ يرمز إلى عدد الطلاب المقبولين في عـــام 1958،... إلخ. ومن ثَم يمكن تمثيل عدد الطلاب المقبولين بجامعة الملك سعود كل عام بعائلة من المتغيرات العشوائية $\{X(n): n = 1957,1958,...\}$ والتي تعتبر مثالاً لعملية عشوائية منفصلة الـــزمن منفصلة الحالة.

(١,٤) خواص العمليات العشوائية

Properties of stochastic processes

يمكن إلقاء بعض الضوء حول العمليات العشوائية بدون الخوض في خواصها البنائيـــة. غالباً ما يهتم الباحثون بدراسة بناء نموذج للعلاقة بين قيم $X(n)$ أو $X(t)$ عندما تتحـــرك (تتغير) العملية مع الزمن. في أبسط الأنظمة تكون المتغيرات العشوائية $X(n)$ مستقلة. وهذا يعني أن الناتج في وقت ما لا يتأثر بالنواتج في الأزمنة الأخرى. كمثال على ذلك نتائج عملية تكرار إلقاء زهرة نرد غير متميزة. وفي بعض الأنظمة الأخرى تتأثر نتيجة $X(n)$ عند وقت ما بجميع النتائج السابقة. كمثال على ذلك بفرض أنه يتم سحب أعداد عشوائية الواحـــد بعـــد الآخر وبدون إحلال من صندوق يحتوي على الأعداد الصحيحة من 1 إلى 100. فمن الواضح أن العدد الذي سيتم سحبه في المستقبل يعتمد على جميع الأعداد التي سحبت من قبل.

فيما يلي بعض الخواص الهامة الأخرى للعمليات العشوائية:

١- **العملية العشوائية ذات زيادات مستقلة** independent increments : تسمى العملية العشوائية $\{X(t): t \in T\}$ بعملية عشوائية ذات زيادات مـــستقلة إذا كانـــت المـــــــتغيرات العـــــــشوائية $X(t_2)-X(t_1)$، $X(t_3)-X(t_2)$ ، ...، $X(t_n)-X(t_{n-1})$ مستقلة لجميع اختيارات الأزمنة t_1 ، t_2، ... ، t_n والتي تحقق $t_1 < t_2 < ... < t_n$.

بمعنى آخر : في العملية العشوائية ذات الزيادات المستقلة تكون كميات التغيير في حالة العملية العشوائية على فترات غير متداخلة مستقلة.

٢- **العملية العشوائية ذات زيادات مستقرة (ثابتة) stationary increments** : تسمى العملية العشوائية $\{X(t):t \in T\}$ بعملية عشوائية ذات زيادات مستقرة إذا كان توزيع المتغير العشوائي $X(t+s)-X(t)$ مستقل عن t. وهذا يعني أن التوزيع الاحتمالي لكمية تغير حالة العملية العشوائية خلال فترة معينة $[t,t+s]$ يعتمد فقط على طول الفترة s ولا يعتمد على بدايتها t.

٣- **العملية العشوائية ذات خاصية ماركوف Markovian property** : يقال للعملية العشوائية $\{X(t):t \in T\}$ أنها تتمتع بخاصية ماركوف إذا كانت حالتها في المستقبل، بشرط معرفة حالاتها في الماضي والحاضر، لا تتأثر إلا بحالتها الحاضرة فقط، أي أن حالة العملية في الماضي ليس لها أي تأثير على حالتها في المستقبل بشرط معرفة حالتها في الحاضر. وهذا يعني أنه لكل لحظة زمنية u فإن المتغير العشوائي $X(t)$، $t>u$ يكون مستقلاً عن المتغير العشوائي $X(t)$، $t<u$ بشرط معرفة المتغير العشوائي $X(u)$. العملية العشوائية التي تتمتع بخاصية ماركوف تسمى عملية ماركوف.

العملية العشوائية منفصلة الزمن منفصلة الحالة تحقق خاصية ماركوف إذا تحقق الشرط التالي:

$$P(X_{n+1}=j \mid X_n=i,\ X_{n-1}=i_{n-1},\dots,X_1=i_1,X_0=i_0)= P(X_{n+1}=j \mid X_n=i)$$

لجميع الحالات $j,i,\ i_{n-1},\dots,i_1,i_0$ ولكل n. يمكن تفسير هذه الخاصية كالآتي: التنبؤ بقيمة X_{n+1} يعتمد فقط على القيمة الحالية لـ X_n ولا يعتمد على قيم الحالات الماضية $X_{n-1},\dots,X_1,X_0$.

بمعنى آخر: بإعطاء الحالة الحالية X_n فإن الحالات الماضية $X_{n-1},\dots,X_1,X_0$ لا تؤثر على الحالات في المستقبل X_{n+1}، X_{n+2}، . . . .

الأمثلة التالية تمكن القارئ من فهم خاصية ماركوف فهما جيدًا.

مثـــال (١,١٠)

لنفرض أننا ألقينا قطعة عملة معدنية غير متميزة عشر مرات وأن X_n يرمز إلى العدد الكلي للصور التي تظهر حتى الرمية رقم n. يقود هـــذا الفـــرض إلى العمليـــة العـــشوائية $\{X_n : n = 1,2,...\}$ بفضاء الحالة $S = \{0,1,2,...,10\}$ وفضاء المعلمة $T = \{1,2,...,10\}$ وأن:

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i,\ X_{n-1} = i_{n-1},..., X_1 = i_1) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & j = i+1, (i = 0,1,2,...,9) \\ \dfrac{1}{2}, & j = i, (i = 0,1,2,...,10) \\ 0\ , & \text{otherwise} \end{cases}$$

من الواضح أن هذا الاحتمال الشرطي يعتمد على i فقط ولا يعتمد على $i_{n-1},...i_2, i_1$، وهذا يعني أنه بمعرفة X_n فإن X_{n+1} لا يعتمد على أي من $X_{n-1},...,X_1$، ومن ثَم فإن هذه العملية تحقق خاصية ماركوف ومن ثَم فإن $\{X_n : n = 1,2,...\}$ تكون سلسلة ماركوف.

مثـــال (١,١١)

بالعودة إلى المثال (١,١٠) ولكن لنفرض أن قطعة العملة متميزة وأن احتمال ظهـــور كتابة يساوي ثلاثة أضعاف احتمال ظهور صورة، أي أن:

$$\mathrm{P}(\text{صورة}) = 1/4, \quad \mathrm{P}(\text{كتابة}) = 3/4$$

إذن:

$$P(X_3 = 2 \mid X_2 = 1,\ X_1 = 1) = P(\text{ظهور صورة في الرمية الثالثة}) = \frac{1}{4},$$

أيضًا:

$$P(X_3 = 2 \mid X_2 = 1,\ X_1 = 0) = P(\text{ظهور صورة في الرمية الثالثة}) = \frac{1}{4},$$

$$P(X_3 = 2 \mid X_2 = 2,\ X_1 = 1) = P(\text{ظهور كتابة في الرمية الثالثة}) = \frac{3}{4}.$$

لاحظ أن جميع هذه الاحتمالات الشرطية تعتمد فقط على قيمة X_2 ومستقلة عن قيمة X_1.

بالمثل يمكن حساب أن:

$$P(X_4 = 3 \mid X_3 = 3, X_2 = 1,\ X_1 = 1) = \frac{3}{4},$$
$$P(X_4 = 3 \mid X_3 = 2, X_2 = i_2,\ X_1 = i_1) = \frac{1}{4},$$
$$P(X_4 = 4 \mid X_3 = 3, X_2 = i_2,\ X_1 = i_1) = \frac{1}{4},$$
$$P(X_4 = 5 \mid X_3 = 3, X_2 = i_2,\ X_1 = i_1) = 0.$$

لاحظ ثانية أن هذه الاحتمالات الشرطية تعتمد فقط على قيمة X_3 ومستقلة عن قيم كل من X_1 ، X_2 . عمومًا يمكن حساب أن:

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i,\ X_{n-1} = i_{n-1},\dots, X_1 = i_1) = \begin{cases} 1/4, & j = i+1, (i = 0,1,2,\dots,9) \\ 3/4, & j = i, (i = 0,1,2,\dots,10) \\ 0\ , & \text{otherwise} \end{cases}$$

يعتمد هذا الاحتمال الشرطي فقط على قيمة i ولا يعتمد على قيم $i_1, i_2, \dots, i_{n-1}$. ومن ثم فإنه عندما تكون قيمة X_n معلومة فإن قيمة X_{n+1} لا تعتمد على أي من $X_1, \dots, X_{n-1}$. وهذا يبرهن على أن العملية العشوائية في هذا المثال تحقق خاصية ماركوف.

مثال (١,١٢)

تتكون لعبة بسيطة من إلقاء قطعة عملة غير متميزة يلقيها اللاعب عددًا من المرات، واللاعب سيكسب ريالاً واحداً كلما ظهرت صورة، ويخسر ريالاً واحداً كلما ظهرت كتابة. ليكن X_n عبارة عن المكسب التراكمي للاعب بعد إلقاء القطعة رقم n ، حيث إن القيمة السالبة تشير إلى الخسارة الفعلية وأن $X_0 = 0$. العملية العشوائية $\{X_n : n = 1,2,\dots\}$ في هذا المثال تحقق خاصية ماركوف. ولتوضيح ذلك سنقدم الحالة الخاصة التالية. نفترض أن اللاعب أصبح يمتلك رصيدًا تراكميًا مقداره ست ريالات وذلك بعد إلقاء قطعة العملة عشر

مرات. يلاحظ أن معرفة ما جرى من خسارة أو مكسب خلال المحاولات التي تسبق المحاولة العاشرة ليس لها أي تأثير في معرفة المكسب التراكمي للاعب بعد إلقاء القطعة الحادية عشرة، فإن المكسب التراكمي بعد إجراء المحاولة الحادية عشرة سيصبح إما سبع ريالات باحتمال $\frac{1}{2}$ أو خمس ريالات بنفس الاحتمال. وهذا يعني أن المكسب التراكمي بعد المحاولة الحادية عشرة يعتمد فقط على المكسب التراكمي للاعب بعد المحاولة العاشرة. ولأنه من الواضح أن هذه النتيجة تتحقق لباقي المحاولات، إذن العملية العشوائية في هذا المثال تحقق خاصية ماركوف.

(١,٥) بعض العمليات العشوائية الشائعة

Some common stochastic processes

فيما يلي نقدم بإيجاز قائمة لبعض العمليات العشوائية الخاصة والتي يكون لكل منها تعريفها الخاص وخواصها وتطبيقاتها.

١- **عملية برنوللي Bernoulli process** . تسمى العملية العشوائية $\{X_n : n = 1,2,...\}$ بعملية **برنوللي** باحتمال النجاح p $(0 \le p \le 1)$ إذا تحقق الشرطان:

(أ) تكون المتغيرات العشوائية X_1، X_2، ... مستقلة.

(ب) $P(X_n = 1) = p$ ، $P(X_n = 0) = q = 1 - p$ لكل $n = 1,2,...$

فضاء المعلمة لعملية برنوللي $\{X_n : n = 1,2,...\}$ عبارة عن فضاء منفصل ويعطى على الصورة $T = \{1,2,...\}$ ، وفضاء الحالة أيضًا يكون فضاء متقطعاً ويعطى بـ $S = \{0,1\}$.

مثال (١,١٣)

إحدى الشركات الخاصة بتجميع أجهزة معينة تقوم بفحص روتيني لكل جهاز يتم تجميعه فيها. فإذا كان الجهاز رقم n معيباً فإنه يتم وضع $X_n = 1$ وأما إذا كان سليماً فيتم وضع $X_n = 0$. بفرض أن عملية الإنتاج تخضع لنظام دقة معين فإن المتغيرات العشوائية $X_1, X_2, ...$ تكون مستقلة وإذا كان احتمال الحصول على نظام معيب p ثابت مع الزمن،

فإن العملية العشوائية $\{X_n : n = 1,2,...\}$ تكون مثالاً لعملية برنوللي باحتمال النجاح p .

٢- **عملية ذي الحدين Binomial process**. لنفرض أن العملية العشوائية $\{X_n : n = 1,2,...\}$ تكون عملية برنوللي باحتمال النجاح p . ليكن :

$$S_n = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ X_1 + X_2 + ... + X_n \ , & n = 1,2,,... \end{cases} \qquad (١,١)$$

عبارة عن عدد مرات النجاح خلال المحاولات الأولى حتى إتمام المحاولة رقم n. إذن العملية العشوائية $\{S_n : n = 0,1,2,...\}$ تسمى عملية **ذي الحدين**، حيث إن:

$$P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, k = 0,1,2,...,n$$

فضاء الحالة وفضاء المعلمة لعملية ذي الحدين يأخذان نفس الصورة والتي تساوي $\{0,1,2,...\}$.

٣- **عملية بواسون Poisson process**. عملية **بواسون** بمعدل λ تكون عبارة عن عملية عشوائية، مثلاً $\{N_t : t \geq 0\}$ ، ذات قيمة صحيحة وتحقق الخواص التالية:

(أ) $N_0 = 0$

(ب) المتغيرات العشوائية $N_{t+s} - N_t$ تتبع توزيع بواسون بمتوسط λs ، وذلك لجميع $t > 0$ ، $s > 0$.

(ج) المتغير العشوائي N_t يكون له زيادات مستقلة.

فضاء الحالة لعملية بواسون $\{N_t : t \geq 0\}$ يكون منفصلاً حيث $S = \{0,1,2,...\}$ أما فضاء المعلمة فهو متصل حيث $T = \{t : t \geq 0\}$. تنتشر تطبيقات عملية بواسون في العديد من المجالات، علي سبيل المثال : نموذج لعملية وصول الزبائن لمتجر ما، نموذج لعدد المكالمات الهاتفية التي تصل إلى محول المكالمات، نموذج وصول الجسيمات المشعة لعداد جيجر، ... إلخ.

٤- **عملية جاوس Gaussian process**. تسمى العملية العشوائية

$\{X_t : t \geq 0\}$ بعملية **جاوس** إذا كان متجه المتغيرات العشوائية $(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n})$ يسلك التوزيع الطبيعي المتعدد لجميع القيم $t_1, t_2, \ldots, t_n \in [0, \infty)$ ولكل $n \geq 1$.

فضاء الحالة وفضاء المعلمة لعملية جاوس يكونان متصلين. تظهر عملية جاوس في العديد من التطبيقات في مجالات الهندسة الكهربائية، علي سبيل المثال : كنموذج لتأثير تغير الجهد الكهربائي على المقاومات، ونموذج تأثير الضوضاء الحاصلة في جهاز الاستقبال في عملية الاتصالات الإلكترونية.

٥- **عملية ونـــر Wiener process**. تسمى العملية العشوائية $\{W_t : t \geq 0\}$ بعملية **ونـــر** إذا حققت الشروط التالية:

(أ) $W_0 = 0$

(ب) $\{W_t : t \geq 0\}$ تكون ذات زيادات مستقرة ومستقلة.

(ج) لكل $t > 0$، فإن المتغير العشوائي W_t يتبع التوزيع الطبيعي بالمتوسط 0 والتباين $c^2 t$، حيث c كمية حقيقية.

فضاء الحالة وفضاء المعلمة لعملية جاوس يكونان متصلين. تسمى عملية ونـــر أحيانا بعملية **حركة براون** Brownian motion process. تظهر عملية ونـــر في العديد من التطبيقات في مجالات ميكانيكا الكم ، والظواهر المتداخلة والاقتصاد وغيرها من التطبيقات.

٦- **عملية أورنستين–أوهلنبك The Ornstein-Uhlenbeck process**. لتكن $\{W_t : t \geq 0\}$ عبارة عن عملية ونـــر، وبتعريف المتغير العشوائي U_t، لبعض قيم $\alpha > 0$، على الصورة:

$$U_t = e^{-\frac{\alpha t}{2}} W_{e^{\alpha t}}, \ t \geq 0$$

إذن العملية العشوائية $\{W_t : t \geq 0\}$ تسمى عملية **أورنسين–أوهلنبك**.

فضاء الحالة وفضاء المعلمة لهذه العملية يكونان متصلين. ظهرت هذه العملية عند دراسة

نموذج لوصف سرعة جسيم مغمور في سائل أو غاز، والتي تفيد في الميكانيكا الإحصائية.

(١,٦) تمارين

(١,١) لنفرض أن تجربة تتكون من مشاهدة تسريع عربة سباق عند اللحظة الزمنية X_t خلال الدقيقة الأولى في السباق. ولنفرض أن Y_t، Z_t سرعة وموضع العربة عند اللحظة. صِفْ فضاء الحالة وفضاء المعلمة للعمليات العشوائية $\{X_t : t \geq 0\}$، $\{Y_t : t \geq 0\}$، $\{Z_t : t \geq 0\}$.

(١,٢) يتم تسجيل درجات حرارة الظهيرة في ميناء الملك فهد الدولي كل يوم لمدة عام ابتداء من الأول من يناير. وينتج من هذه العملية متتابعة من القياسات لدرجة، صِفِ العملية العشوائية التي تناسب هذه الظاهرة.

لاحظ أن الدارسين قد اعتادوا على عمل استدلال لنوعين من متوسطات العمليات العشوائية وهما:

(أ) متوسطات المجموعة مثل: متوسط درجة الحرارة أثناء الظهيرة في التاسع عشر من فبراير عام 1999.

(ب) متوسطات الزمن مثل: متوسط درجة الحرارة أثناء الظهيرة لعام 2002.

(١,٣) لنفرض أن M_t يمثل عدد المكالمات المستلمة عند عامل تحويل مكالمات تليفونية عند اللحظة t، في كل الثانية خلال فترة زمنية طولها خمسة عشر دقيقة. صِفْ:

(أ) عملية عشوائية تناسب هذه الظاهرة.

(ب) متوسط المجموعة.

(ج) متوسط الزمن.

(١,٤) عرف عمليات عشوائية لقياس درجات الحرارة في التمرين (١,٢) بشرط أن تكون هذه العملية:

(أ) منفصلة الزمن (المعلمة) منفصلة القيمة (الحالة).

(ب) منفصلة الزمن (المعلمة) متصلة القيمة (الحالة).

(ج) متصلة الزمن (المعلمة) منفصلة القيمة (الحالة).

(د) متصلة الزمن (المعلمة) متصلة القيمة (الحالة).

(١,٥) يمكن اختيار نموذج بسيط لدرجة الحرارة اليومي في التمرين (١,٢) بتعريف C_n على الصورة:

$$C_n = 16\left[1 - \cos\frac{2\pi n}{365}\right] + 4X_n$$

حيث إن $X_1, X_2, \ldots.$ تكون عبارة عن متتابعة من المتغيرات العشوائية المستقلة والتي لها جميعا التوزيع الطبيعي المعياري. أوجد متوسط C_n.

(١,٦) يمكن اختيار نموذج آخر لدرجة الحرارة اليومي في التمرين (١,٢) بتعريف C_n على الصورة:

$$C_n = \frac{1}{2}C_{n-1} + 4X_n$$

حيث إن $C_0, X_1, X_2, \ldots.$ تكون عبارة عن متتابعة من المتغيرات العشوائية المستقلة والتي لها جميعا التوزيع الطبيعي المعياري. أوجد متوسط وتباين C_n .

الباب الأول

سلاسل ماركوف

- تعريف سلاسل ماركوف
- المسلك التقاربي لسلاسل ماركوف
- تصنيف حالات سلاسل ماركوف
- مسرانية سلاسل ماركوف

الفصل الثاني

تعريف سلاسل ماركوف

Definition of Markov Chains

(٢,١) مقدمة

سيتم تكريس هذا الفصل والفصول الثلاثة التالية لدراسة العمليات العشوائية التي تتمتع بأن حالتها في المستقبل لا تعتمد على حالاتها في الماضي بشرط معرفة حالتها في الحاضر. يسمى هذا النوع من العمليات العشوائية بعمليات ماركوف. سنقدم في هذا الفصل الرموز الأساسية والمصطلحات الفنية لتلك العمليات العشوائية.

تحتل نظرية عمليات ماركوف[1] مكانة كبيرة وهامة جدًا في نظرية العمليات العشوائية. تعزز هذه المكانة تعدد التطبيقات التي تتمتع بها عمليات ماركوف في النماذج الفيزيائية والبيولوجية وعلم الاجتماع والهندسة وعلم الإدارة بالإضافة إلى تطبيقاتها المتعددة في الكثير من النماذج الإحصائية و الهندسية وفي نظرية الموثوقية.

عادةً يتم تفسير سلسلة ماركوف على أنها عبارة عن متتابعة من الحالات التي يمكن أن يكون فيها نظام ما عند أي لحظة زمنية t، أو متتابعة من المواضع التي يحتلها جسيم متحرك. نقدم فيما يلي التعريف الرياضي لسلسلة ماركوف:

---

(١) **نبذه تاريخية مختصرة حول ماركوف** : أندري أنريفيتش ماركوف (١٨٥٦ – ١٩٢٢م) كان أستاذًا في جامعة سانت بيتربيرج بالاتحاد السوفيتي السابق منذ عام ١٨٨٦م كما أنه أصبح عضوًا كاملاً في أكاديمية العلوم بسانت بيتربيرج منذ عام ١٨٩٦م. بدأ دراسة سلاسل بسيطة في عام ١٩٠٦م وقام بنشر العديد من الأبحاث تخص هذا الموضوع وبعد فترة حصل على شهرة كرائد في هذا المجال. وقد ظهر تعبير سلسلة ماركوف قبل عام ١٩٢٦م.

تعريف (٢,١)

تسمى العملية العشوائية $\{X_n : n \in T\}$ **سلسلة ماركوف** Markov chain إذا تحققت الشروط الثلاثة التالية:

١- فضاء الحالة لهذه العملية يكون منفصلاً (منفصلة الحالة).

٢- فضاء المعلمة لهذه العملية يكون منفصلاً (منفصلة الزمن).

٣- تحقق هذه العملية خاصية ماركوف:

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_1 = i_1) = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) \qquad (٢,١)$$

ومن ثم فإن سلسلة ماركوف $\{X_n : n \in T\}$ تكون عبارة عن عملية ماركوف، بمعنى أن قيمة المتغير العشوائي X_{n+1} تعتمد فقط على قيمة X_n ولا تتأثر بقيم المتغيرات $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$، وأن فضاء المعلمة (الزمن) لها يكون منفصلاً، أما فضاء الحالة فيكون منفصلاً منتهياً (محدوداً) أو غير منتهٍ ولكنه قابل للعد. سوف نهتم في هذا الكتاب بسلاسل ماركوف ذات فضاء الحالة المنتهي. معظم النتائج التي سنقابلها في هذا الكتاب والتي تتعلق بسلسلة ماركوف ذات فضاء الحالة المنتهي يمكن أن تعمم مباشرة لتشمل سلسلة ماركوف ذات فضاء الحالة غير المنتهي وقابل للعد.

نقدم فيما يلي أربع أمثلة لسلاسل ماركوف. كل من المثالين الأول والثاني يكون عبارة عن سلسلة ماركوف بفضاء الحالة المنتهي، أما في المثالين الثالث والرابع بفضاء الحالة غير المنتهي.

مثال (٢,١): (نظام اتصالات Communication system)

اعتبر أن لدينا نظام اتصالات يبث إشارتين رقميتين إما 0 أو 1. وفي هذا النظام يجب أن تمر كل إشارة مرسلة عبر العديد من المراحل، وفي كل مرحلة فإن الرقم المرسل سيظل بدون تغير في هذه المرحلة حتى يخرج منها باحتمال p. ليكن X_n يشير إلى الرقم الذي دخل إلى المرحلة n. إذن:

$$X_{n+1}=\begin{cases}X_n & \text{إذ لم تتغير الإشارة}\\ 1-X_n & \text{إذا تغيرت الإشارة}\end{cases}$$

لاحظ أن X_{n+1} يعتمد فقط على X_n ولا يعتمد على $X_1,X_2,...,X_{n-1}$، وأيضا فضاء الحالة في هذه العملية هو $S=\{0,1\}$ وهو منتهٍ وأن فضاء المعلمة $T=\{1,2,...\}$ منفصل. ولذلك فإن العملية العشوائية $\{X_n:n\in T\}$ تكون مثالاً لسلسلة ماركوف ذات فضاء الحالة المنتهي.

مثال (٢,٢)

تم وضع أربع قطع من العملة المعدنية في أحد صفوف جدول ما، ثم أجريت عليها تجربة عشوائية مكونة من العديد من المراحل، وفي كل مرحلة يتم اختيار قطعة عملة من بينها بطريقة عشوائية ثم تقلب. ليكن X_n عبارة عن عدد الصور الكلي الذي يظهر على السطح العلوي للقطع الأربع في المرحلة رقم n . أثبت أن $\{X_n:n\in T\}$ تكون سلسلة ماركوف.

الحل

بالنسبة لهذه التجربة العشوائية يكون من السهل استنتاج أن فضاء العينة هو $S=\{0,1,2,3,4\}$ وهو منتهٍ وأن فضاء المعلمة منفصل وهو $T=\{1,2,...\}$. أيضًا إذا كان $X_n=i$ (عدد الصور في المرحلة رقم n) فإنه في المرحلة التالية سيكون عدد الصور الكلي إما $(i+1)$ "أي أن عدد الصور يزداد واحداً، ويحدث ذلك إذا كانت القطعة المختارة عليها كتابة قبل أن تقلب" وإما $(i-1)$ "أي أن عدد الصور ينقص واحداً، ويحدث ذلك إذا كانت القطعة المختارة عليها صورة قبل أن تقلب". ومن ثم فإن:

$$P(X_{n+1}=j\mid X_n=i,X_{n-1}=i_{n-1},...,X_1=i_1)=p_{ij}$$

حيث إن:

$$p_{ij}=\begin{cases}\frac{4-i}{4}, & j=i+1\ (i=0,1,2,3),\\ \frac{i}{4}, & j=i-1\ \ (i=1,2,3,4),\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

من الواضح أن هذا الاحتمال الشرطي يعتمد على قيمة المتغير العشوائي X_n فقط ولا يعتمد

على قيم المتغيرات العشوائية $X_1, X_2, ..., X_{n-1}$. ولذلك فإن العملية العشوائية $\{X_n : n = 1,2,3,...\}$ تكون سلسلة ماركوف.

تمرين (٢,١)

أعد نفس العملية العشوائية الموضحة في المثال السابق عندما يكون عدد قطع العملة المعدنية في الجدول مساويًا للعدد N.

الحل

يمكن البرهان على أن العملية العشوائية في هذا التمرين تحقق خاصية ماركوف بطريقة مماثلة لما تم تقديمه في المثال السابق:

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, ..., X_1 = i_1) = p_{ij}$$

حيث إن:

$$p_{ij} = \begin{cases} \dfrac{N-i}{N}, & j = i+1 \quad (i = 0,1,...,N-1), \\ \dfrac{i}{N}, & j = i-1 \quad (i = 1,2,...,N), \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

مثال (٢,٣): (عملية ذي الحدين Binomial process)

ليكن S_n يشير إلى عدد مرات النجاح خلال n محاولة من محاولات برنوللي باحتمال النجاح p في كل محاولة. العملية العشوائية $\{S_n : n \in T\}$ تشير إلى عملية ذات الحدين، حيث إن:

$$S_n = \begin{cases} 0, & n = 0, \\ X_1 + X_2 + ... + X_n, & n \geq 1. \end{cases}$$

حيث إن X_i يرمز إلى متغير عشوائي له توزيع برنوللي. فضاء المعلمة في هذه الحالة يكون $T = \{1, 2, ...\}$ وفضاء الحالة يكون $S = \{0,1,2,...\}$. أيضًا:

$$P\left(S_{n+1}=j \mid S_n=i,\, S_{n-1}=i_{n-1},\ldots,S_1=i_1\right)=\begin{cases} p, & j=i+1 \quad (i=0,1,\ldots) \\ 1-p, & j=i \quad (i=0,1,\ldots) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

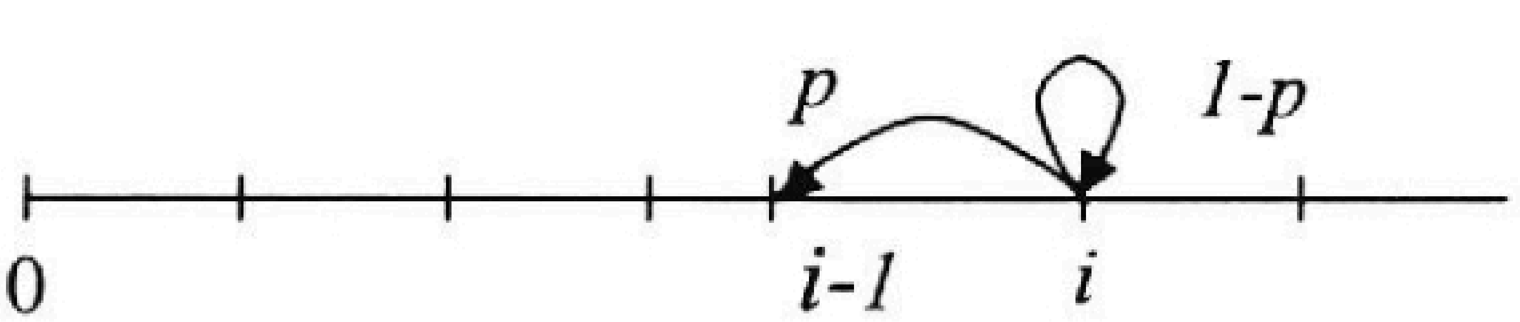
يعتمد هذا الاحتمال الشرطي على قيمة S_n فقط ولا يعتمد على قيم $S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}$. وذلك لأن:

$$S_{n+1}=S_n+X_{n+1}$$

وبذلك فإنه من الواضح أن S_{n+1} تعتمد فقط على S_n . وأيضًا كل من فضاء الحالة وفضاء المعلمة منفصل. وبذلك فإن العملية العشوائية $\{S_n : n \in T\}$ تكون مثالاً لسلسلة ماركوف.

تطبيق : (المشي العشوائي البسيط Simple random walk)

لنفرض أن موضع جزيء ما عند اللحظة الزمنية n هو المكان i ، وأنه عند اللحظة $n+1$ إما أن ينتقل إلى الموضع $(i-1)$ باحتمال p وإما أن يبقى في نفس مكانه i باحتمال $(1-p)$ ، انظر الشكل (٢,١). إذا رمزنا بـ S_n لموضع الجزيء عند اللحظة n، فإن $\{S_n, n=0,1,2,\cdots\}$ تكون مثالاً لسلسلة ماركوف المذكورة في مثال (٢,٣).



شكل (٢,١): المشي العشوائي البسيط.

مثال (٢,٤)

العملية العشوائية ذات الزيادات المستقلة تكون سلسلة ماركوف. يمكن إثبات ذلك كالآتي: لنفرض أن $\{X_n : n \in T\}$ تكون عملية عشوائية ذات زيادات مستقلة:

$$\begin{aligned} P\left(X_{n+1}=j \mid X_n=i,\, X_{n-1}=i_{n-1},\ldots,X_1=i_1\right) &= \\ &= P\left(X_{n+1}-X_n=j-i \mid X_n-X_{n-1}=i-i_{n-1},\ldots,X_2-X_1=i_2-i_1\right) \\ &= P\left(X_{n+1}-X_n=j-i\right) \end{aligned}$$

تنتج المساواة الأخيرة من خاصية استقلال الزيادات $X_2 - X_1$ ، $X_3 - X_2$ ، ... ، $X_{n+1} - X_n$. العلاقة التي توصلنا إليها تعني أن الاحتمال الشرطي يعتمد على قيمة X_n فقط ولا يعتمد على قيم المتغيرات $X_1, X_2, ..., X_{n-1}$ وهذا يثبت أن العملية $\{X_n : n \in T\}$ تكون متسلسلة ماركوف.

(٢,٢) احتمال الانتقال في خطوة واحدة

One-step transition probability

لتكن $\{X_n, n = 0,1,2,\cdots\}$ سلسلة ماركوف بفضاء الحالة $S = \{0,1,2,\cdots\}$. احتمال انتقال العملية العشوائية من الحالة i إلى الحالة j خلال خطوة واحدة يرمز له بالرمز $p_{ij}^{(n,n+1)}$ و يعرف كما في العلاقة التالية:

$$p_{ij}^{(n,n+1)} = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i), \qquad i, j = 0,1,2,...$$

يسمى هذا الاحتمال الشرطي باحتمال الانتقال في الخطوة الواحدة one-step transition probability. يمثل هذا الاحتمال أساساً لدراسة خواص سلاسل ماركوف. وعمومًا يعتمد هذا الاحتمال على n ، لكن في العديد من التطبيقات التي يستخدم فيها سلاسل ماركوف فإنه لايعتمد على n. وسوف نتقيد في هذا الكتاب بالحالات التي فيها $p_{ij}^{(n,n+1)}$ لا يعتمد على n ، بمعنى أن :

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = P(X_1 = j \mid X_0 = i) \quad \forall n$$

وهذا يعني، على سبيل المثال، أن:

$$P(X_3 = j \mid X_2 = i) = P(X_7 = j \mid X_6 = i) = P(X_{32} = j \mid X_{31} = i), ...$$

احتمالات الانتقال في هذه الحالة تسمى باحتمالات الانتقال المستقرة كما تسمى العملية العشوائية $\{X_n, n = 0,1,2,\cdots\}$ بسلسلة ماركوف المتجانسة homogenous Markov chain. وبذلك فإنه يمكن كتابة احتمال الانتقال في خطوة بالصورة التالية:

$$p_{ij} = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i), \ \forall n$$

ومن ثم فإن p_{ij} يكون عبارة عن احتمال أن العملية ستكون في الحالة j بعد خطوة واحدة،

بشرط أنها كانت في الحالة i وأن هذا الاحتمال لا يعتمد على n.

تعريف (٢,٢): (احتمالات الانتقال المستقرة Stationary Transition Probabilities)

احتمال الانتقال من الحالة i إلى الحالة j في خطوة يكون مستقرًا إذا كان **لا يعتمد** على (مستقل عن) n، و سنرمز له في هذه الحالة بالرمز p_{ij}. أي أن:

$$p_{ij} = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i), \quad \forall \ n$$

وللتبسيط سنكتفي بتعبير احتمالات الانتقال بدلاً من احتمالات الانتقال في خطوة واحدة.

تعريف (٢,٣) : (سلسلة ماركوف المتجانسة Homogeneous Markov chain)

سلسلة ماركوف تكون متجانسة إذا كانت احتمالات انتقالاتها **مستقرة.**

في المثال (٢,٢) وجدنا أن احتمالات الانتقال في الخطوة الواحدة هي:

$$p_{ij} = \begin{cases} \dfrac{4-i}{4}, & j = i+1 \ (i = 0,1,2,3), \\ \dfrac{i}{4}, & j = i-1 \ \ (i = 1,2,3,4), \\ & \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

ومن الواضح أن هذه الاحتمالات لا تعتمد على n، ومن ثم فإنها احتمالات انتقال مستقرة وبذلك فإن سلسلة ماركوف في المثال (٢,٢) تكون متجانسة.

يمكن كتابة تجمع احتمالات الانتقال $p_{ij}, i, j = 0,1,2,3,...$ في شكل مصفوفة كما يلي:

$$P = \begin{array}{c} \\ i=0 \\ i=1 \\ i=2 \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} j=0 & j=1 & j=2 & \end{array} \\ \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \cdots \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \end{array}$$

تسمى هذه المصفوفة بمصفوفة احتمالات الانتقال (م.ح.ن) Transition probability matrix لسلسلة ماركوف $\{X_n : n \in T\}$. الصف رقم i يمثل الحالة i أما العمود رقم j فيمثل الحالة رقم j، أما العنصر الذي ترتيبه (i,j) فيمثل الاحتمال p_{ij} وهو احتمال انتقال العملية العشوائية من الحالة i إلى الحالة j في خطوة واحدة. تحقق عناصر م.ح.ن خاصتين رئيستين سنعرضهما فيما يلي:

خواص م.ح.ن

تتمتع م.ح.ن لسلسلة ماركوف بأنها تحقق العلاقات التالية:

١- جميع عناصرها غير سالبة، أي أن :

$$p_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j \in T \tag{٢,٢}$$

٢- مجموع عناصر أي صف من صفوفها يساوي الواحد، أي أن

$$\sum_{j \in T} p_{ij} = 1 \quad \forall i \in T \tag{٢,٣}$$

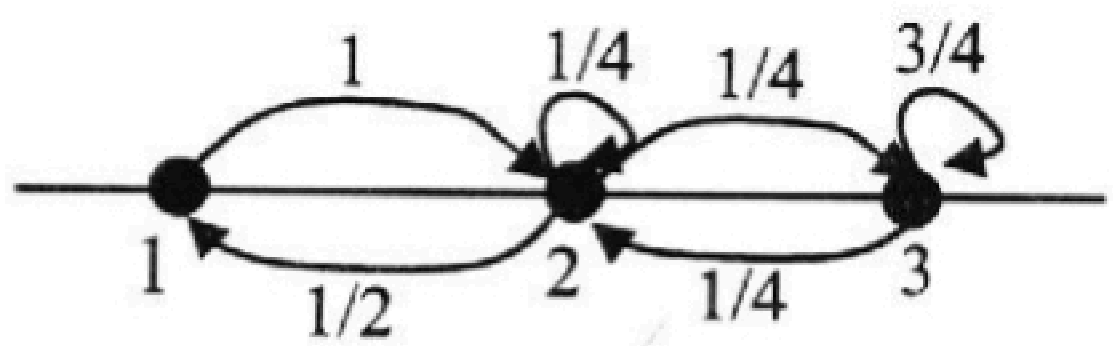
وعمومًا، أي مصفوفة يتحقق أن جميع عناصرها تكون غير سالبة وأقل من أو تساوي الوحدة ومجموع عناصر أي صف من صفوفها يساوي الوحدة (أي أن عناصر كل صف من صفوفها يكون توزيعًا احتماليًا) تسمى **بمصفوفة عشوائية**. يمكن تعريف سلسلة ماركوف مع كل مصفوفة عشوائية، تكون هذه المصفوفة عبارة عن م.ح.ن. لتلك السلسلة.

إذا كان عدد الحالات محدودًا (منتهيًا) فإن المصفوفة P تكون مصفوفة مربعة محدودة، عدد صفوفها يساوي عدد الحالات. المصفوفات التالية تمثل أمثلة لبعض م.ح.ن محدودة وأخرى غير محدودة:

١- P تكون مصفوفة محدودة وتناظر سلسلة عشوائية لها ثلاث حالات:

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \end{array}$$

من الواضح أن هذه المصفوفة تكون عبارة عن م.ح.ن. لسلسلة ماركوف بفضاء الحالة $S = \{1,2,3\}$ وأن احتمالات الانتقال الممكنة بين حالاتها تكون كما هو موضح بالشكل (٢,٢).



شكل (٢,٢): انتقالات السلسلة المقابلة للمصفوفة P .

٢- P تكون مصفوفة محدودة وتناظر سلسلة عشوائية ذات أربع حالات:

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \end{array}$$

٣- P تكون مصفوفة غير محدودة وتناظر سلسلة عشوائية لها عدد غير محدود من الحالات:

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \\ \vdots \end{array} & \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2^2} & \frac{1}{2^3} & \frac{1}{2^4} & \frac{1}{2^5} & \cdots \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2^2} & \frac{1}{2^3} & \frac{1}{2^4} & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2^2} & \frac{1}{2^3} & \cdots \\ & & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \end{array}$$

نقدم فيما يلي بعض الأمثلة التي تمكن القارئ من فهم سلاسل ماركوف فهمًا جيدًا، سنبدأ بتقديم سلاسل ماركوف ذات م.ح.ن. بسيطة ومحدودة (منتهية) مثل تلك التي تستخدم كثيرًا في سلاسل ماركوف بحالتين، ثم نقدم سلاسل أكثر تقنية.

مثال (٢,٥)

بالعودة مرة أخرى إلى المثال (٢، ١). ليكن $i, j \in S = \{0,1\}$ ؛ فإن احتمالات الانتقال تكون:

$$p_{ij} = P\left(N_{n+1} = j \mid N_n = i\right) = \begin{cases} p, & j = i, \\ 1-p, & j = 1-i, \end{cases}$$

وبذلك فإن م.ح.ن. تكون منتهية وتأخذ الصورة التالية:

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix} \end{array}$$

نلاحظ أن هذه المصفوفة تحقق فيها أنه بالإضافة إلى أن مجموع عناصر كل صف يساوي الوحدة يكون مجموع عناصر كل عمود يساوي الوحدة. مثل هذا النوع من المصفوفات العشوائية يسمى بالمصفوفة **العشوائية المزدوجة** doubly stochastic matrix.

مثال (٢,٦)

أثناء دراسة ظاهرة سقوط المطر على مدينة معينة وجد أن سلسلة ماركوف بحالتين يمكن أن تصف ظاهرة حدوث الأيام الماطرة والجافة وصفًا جيدًا. لنفرض أنه إذا كان اليوم الحالي يومًا ماطرًا، فإن اليوم التالي سيكون ماطراً باحتمال 0.8 ، أما إذا كان اليوم الحالي جافاً فإن اليوم التالي سيكون ماطراً باحتمال 0.4 . أوجد م.ح.ن لسلسلة ماركوف المعرفة في هذا المثال.

الحل

سلسلة ماركوف في هذا المثال يكون لها حالتين فقط وهما الحالة 1 والتي تعبر عن أن الجو جاف، والحالة 2 والتي تعبر عن أن الجو ماطر. وهذا يقودنا إلى م.ح.ن التالية:

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} \end{array}$$

يمكن استنتاج ما يلي من م.ح.ن :

١- $p_{11} = 0.6$ وهذا يعني أنه إذا كان اليوم جافاً، فإن اليوم التالي (غدًا) سيكون جافاً باحتمال 0.6 .

٢- $p_{21} = 0.2$ وهذا يعني أنه إذا كان اليوم ماطراً، فإن اليوم التالي (غدًا) سيكون جافاً باحتمال 0.2 .

مثال (٢,٧)

لنفرض أن الطقس في يوم معين يكون عبارة عن سلسلة ماركوف بفضاء الحالة $S = \{0 \equiv \text{ماطر}, \quad 1 \equiv \text{مشمس}\}$. علاوة على ذلك نفترض أن حالات الطقس خلال الواحد والعشرين يومًا الماضية كانت:

0 ، 1 ، 1 ، 0 ، 0 ، 1 ، 0 ، 0 ، 1 ، 1 ، 1 ، 0 ، 0 ، 0 ، 1 ، 0 ، 0 ، 0 ، 1 ، 1 ، 1

ليكن N_{ij} عبارة عن عدد مرات الانتقال من الحالة i إلى الحالة j . الجدول التالي يعطينا هذه الأعداد:

جدول (٢,١). عدد مرات الانتقال من الحالة i إلى الحالة j .

N_{ij}		$j=0$	$j=1$
i	0	6	5
	1	4	5

يمكن تقدير احتمالات الانتقال من الحالة i إلى الحالة j باستخدام البيانات المعطاة في الجدول (٢,١) باستخدام العلاقة التالية:

$$p_{ij} = \frac{N_{ij}}{\sum_{k \in S} N_{ik}} \quad \forall\, i, j \in S$$

وبذلك فإن تقدير م.ح.ن يصبح:

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{pmatrix} \frac{6}{6+5} & \frac{5}{6+5} \\ \frac{4}{4+5} & \frac{5}{4+5} \end{pmatrix} \end{array}$$

مثال (٢,٨)

لنفرض أنه يمكن لتحويلة هاتفية في أحد المتاجر أن تستقبل مكالمة واحدة فقط لكل دقيقة (وحدة دورة العمل). من ثَم فإن التحويلة إما أن تكون مشغولة أو شاغرة. وبملاحظة حالات عمل التحويلة خلال 50 دورة عمل حصلنا على النتائج الموضحة في الجدول التالي:

	0	1
0	3	14
1	15	18

حيث إن 0 يرمز إلى أن التحويلة شاغرة أما 1 فيرمز إلى أن التحويلة مشغولة في خدمة متصل. ليكن X_n يرمز إلى حالة عمل التحويلة ، فإن $\{X_n : n = 1,2,3,...\}$ تكون سلسلة ماركوف بفضاء حالة $S = \{0,1\}$. يمكن استخدام البيانات الموضحة في الجدول السابق في تقدير احتمالات انتقال هذه السلسلة على النحو التالي:

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{pmatrix} 0.18 & 0.82 \\ 0.45 & 0.55 \end{pmatrix} \end{array}$$

وعمومًا، إذا كانت البيانات معطاة في جدول تكراري كما في الجدول التالي:

	0	1
0	n_{00}	n_{01}
1	n_{10}	n_{11}

حيث إن n_{ij} يرمز إلى عدد الانتقالات من الحالة i إلى الحالة j ، $i, j \in S = \{0,1\}$. فإن تقدير المصفوفة P يعطى على الصورة التالية:

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \quad 0 \quad & \quad 1 \quad \end{array} \\ \begin{pmatrix} \dfrac{n_{00}}{n_{00}+n_{01}} & \dfrac{n_{01}}{n_{00}+n_{01}} \\ \dfrac{n_{10}}{n_{10}+n_{11}} & \dfrac{n_{11}}{n_{10}+n_{11}} \end{pmatrix} \end{array}$$

مثال (٢,٩)

لسلسلة ماركوف المعرفة في المثال (٢,٢) فإن م.ح.ن تأخذ الصورة التالية :

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

يمكن تفسير بعض هذه الاحتمالات كالآتي:

١- $p_{00} = P(X_{n+1} = 0 \mid X_n = 0) = 0$ ، وهذا يعني أن في المثال (٢,٢) إذا كان عدد الصور الكلي يساوي صفراً فإنه في الخطوة التالية يبقى عدد الصور الكلي كما هو مساويًا للصفر باحتمال صفر.

٢- $p_{01} = P(X_{n+1} = 1 \mid X_n = 0) = 1$ ، وهذا يعني أنه إذا كان عدد الصور الكلي يساوي صفراً فإنه في الخطوة التالية يصبح عدد الصور الكلي مساويًا صورة واحدة باحتمال واحد (أكيد).

٣- $p_{12} = P(X_{n+1} = 2 \mid X_n = 1) = 3/4$ ، وهذا يعني أنه إذا كان عدد الصور الكلي يساوي صورة واحدة فإنه في الخطوة التالية يصبح عدد الصور الكلي مساويًا صورتين باحتمال $3/4$.

٤- $p_{34} = P(X_{n+1} = 4 \mid X_n = 3) = 1/4$ ، وهذا يعني أنه إذا كان عدد الصور الكلي يساوي ثلاث صور فإنه في الخطوة التالية يصبح عدد الصور الكلي أربع صور باحتمال

.$1/4$

مثال (٢,١٠)

لنفرض أن لدينا صندوقين A ، B ثم وضعنا فيهما خمس كرات خضراء وخمس كرات بيضاء بشرط أن كل منهما يحتوي على خمس كرات. ثم أجري عليهما عملية مكونة من العديد من المراحل المتتالية. وفي كل مرحلة يتم اختيار كرة من كل صندوق بطريقة عشوائية ثم نعكس موضعيهما (بمعنى أنه يتم وضع الكرة المسحوبة من الصندوق A في الصندوق B والعكس). ثم عرفنا المتغير العشوائي X_n على أنه عدد الكرات البيضاء في الصندوق A بعد تنفيذ المرحلة رقم n. وضح أن العملية العشوائية $\{X_n : n = 1,2,3,...\}$ تكون سلسلة ماركوف ثم أوجد مصفوف احتمال الانتقال لها.

الحل

بما أن عدد الكرات في كل صندوق دائمًا ثابت ويساوي خمس كرات، إذن عدد الكرات البيضاء في الصندوق A عند أي مرحلة سيكون محصوراً من صفر إلى خمس كرات، وهذا يقود إلى أن فضاء الحالة للعملية العشوائية هو $S = \{0,1,2,3,4,5\}$ وهو محدود، أما فضاء المعلمة فهو $T = \{1,2,3,\cdots\}$. أيضًا لدينا:

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, ..., X_1 = i_1) = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$$

لا يعتمد هذا الاحتمال الشرطي على الحالات $i_{n-1},...,i_2,i_1$ ، وهذا يعني أن $\{X_n : n = 1,2,3,...\}$ تكون سلسلة ماركوف. لاحظ أنه إذا كان $X_n = i$ فإن X_{n+1} يمكن أن تأخذ أحد القيم i أو $i+1$ أو $i-1$. وهذا يعني أن عدد الكرات البيضاء في الصندوق بعد محاولة يمكن أن:

١- يظل ثابتاً $X_{n+1} = i$ ، وذلك إذا سحبت كرتين من نفس اللون من كل صندوق.

٢- أو يزداد بواحد $X_{n+1} = i+1$ ، وذلك إذا سحبت كرة خضراء من A وكرة بيضاء من B، ما عدا $i = 5$.

٣- أو ينقص بواحد $X_{n+1} = i-1$ ، وذلك إذا سحبت كرة خضراء من B وكرة بيضاء من A، ما عدا $i = 0$.

لاحظ أن:

$$P(\text{سحب كرة بيضاء من } A) = P(\text{سحب كرة خضراء من } B) = i/5$$

$$P(\text{سحب كرة بيضاء من } B) = P(\text{سحب كرة خضراء من } A) = (5-i)/5$$

وبذلك يمكن حساب احتمالات الانتقال على النحو التالي:

$$p_{ij} = \begin{cases} \left(\frac{5-i}{5}\right)\left(\frac{i}{5}\right)+\left(\frac{i}{5}\right)\left(\frac{5-i}{5}\right)=2\left(\frac{i}{5}\right)\left(\frac{5-i}{5}\right), & j=i,(i=0,1,\ldots,5), \\ \left(\frac{5-i}{5}\right)\left(\frac{5-i}{5}\right), & j=i+1,(i=0,1,\ldots,4), \\ \left(\frac{i}{5}\right)\left(\frac{i}{5}\right), & j=i-1,(i=1,2,\ldots,5), \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

ومن ثم فإن م.ح.ن تأخذ الصورة التالية:

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{25} & \frac{6}{25} & \frac{16}{25} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{25} & \frac{12}{25} & \frac{9}{25} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{9}{25} & \frac{12}{25} & \frac{4}{25} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{16}{25} & \frac{8}{25} & \frac{1}{25} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

نلاحظ أن p_{ij} تكون مستقلة عن n ، ومن ثَم فإن احتمالات الانتقال للعملية العشوائية $\{X_n : n=1,2,3,\ldots\}$ تكون مستقرة، وهذا يعني أن سلسلة ماركوف $\{X_n : n=1,2,3,\ldots\}$ تكون متجانسة.

فيما يلي سنعمم النموذج المعطى في المثال (٢,١٠)، وذلك عندما يحتوي كل من الصندوقين على N كرة بيضاء و N كرة خضراء، ففي هذه الحالة يمكن استنتاج احتمالات الانتقال في الصورة التالية :

$$p_{ij}=\begin{cases}2\left(\frac{i}{N}\right)\left(\frac{N-i}{N}\right), & j=i,(i=1,2,\cdots,N-1),\\ \left(\frac{N-i}{N}\right)^2, & j=i+1,(i=0,1,2,\cdots,N-1),\\ \left(\frac{i}{N}\right)^2, & j=i-1,(i=1,2,\cdots,N),\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

يلاحظ في المثال (٢,١٠) أن عدد الكرات في كل من الصندوقين متساوٍ، أما في المثال التالي سندرس نموذجاً مماثلاً ولكن عندما يحتوي كل من الصندوقين على عدد كرات غير متساوٍ مع ما يحتويه الآخر.

مثال (٢,١١)

لنفرض أن لدينا صندوقين A ، B ثم وضعنا فيهما خمس كرات خضراء وكرتين لونهما أبيض بشرط أن الصندوق A يحتوي على أربع كرات ويحتوي الصندوق B على ثلاث كرات. ثم أجري عليهما عملية مكونة من العديد من المراحل المتتالية. وفي كل مرحلة يتم اختيار كرة من كل صندوق بطريقة عشوائية ثم نعكس موضعيهما (بمعنى أنه يتم وضع الكرة المسحوبة من الصندوق A في الصندوق B والعكس). ليكن Y_n يرمز إلى عدد الكرات البيضاء في الصندوق A بعد تنفيذ المرحلة رقم n. من السهل توضيح أن العملية العشوائية $\{Y_n : n=1,2,3,...\}$ تكون سلسلة ماركوف بفضاء الحالة $S=\{0,1,2\}$ وفضاء المعلمة $T=\{1,2,3,\cdots\}$. ويمكن أيضًا حساب احتمالات الانتقال على الصورة التالية:

$$p_{ij}=\begin{cases}\left(\frac{4-i}{4}\right)\left(\frac{i+1}{3}\right)+\left(\frac{i}{4}\right)\left(\frac{2-i}{3}\right), & j=i,(i=0,1,2),\\ \left(\frac{4-i}{4}\right)\left(\frac{2-i}{3}\right), & j=i+1,(i=0,1),\\ \left(\frac{i}{4}\right)\left(\frac{i+1}{3}\right), & j=i-1,(i=1,2),\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

ومن ثم فإن م.ح.ن تأخذ الصورة التالية:

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{7}{12} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{array}$$

من الواضح أن p_{ij} لا يعتمد على n ومن ثَم فإن $\{Y_n : n = 1,2,3,...\}$ تكــون سلــسلة ماركوف باحتمالات انتقال مستقرة (أي أنها سلسلة متجانسة لماركوف).

مثال (٢,١٢)

لنفرض أن أربع كرات تم توزيعهم عشوائيًا في صـــندوقين A ، B . تم اختيـــار صندوق عشوائيًا ثم سحبنا منه كرة عشوائيًا ثم وضعناها في الصندوق الآخر. لنفــرض أننـــا أجرينا هذه العملية عددًا من المرات. ليكن X_n يرمز إلى عدد الكرات في الصندوق A بعـــد تنفيذ الخطوة رقم n . لنفرض أن احتمال اختيار الصندوق A في كل مرة ثابت ويـــساوي $\frac{2}{3}$ واختيـــــار الـــــصندوق B باحتمــــــال $\frac{1}{3}$. يمكــــــن إثبــــــات أن العمليـــــة العشوائية $\{X_n : n = 1,2,3,...\}$ تكون سلسلة ماركوف بفضاء الحالــة $S = \{0,1,2,3,4\}$ وفضاء المعلمة $T = \{1,2,3,\cdots\}$. كما يمكن أيضًا حساب احتمالات الانتقال على الصورة التالية:

$$p_{ij} = \begin{cases} \dfrac{1}{3}, & j = i+1, i = 0,1,2,3, \\ \dfrac{2}{3}, & j = i-1, i = 1,2,3,4, \\ \dfrac{1}{3}, & j = i = 4, \\ \dfrac{2}{3}, & j = i = 0, \\ & \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

ومن ثم فإن م.ح.ن تكون:

$$P=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

المثال التالي يعتبر تعميمًا للنموذج المقدم في المثال (٢,١٢):

مثال (٢,١٣)

لنفرض أن لدينا صندوقين A ، B يحتويان على N من الكرات. تم إجراء عملية عشوائية عليهما، وهي أولاً: يتم اختيار كرة عشوائيًا من بين هذه الكرات (حيث إن جميع الكرات لها نفس فرص الاختيار) عند اللحظة t، $(t=1,2,3,\cdots)$،ثم اختير صندوق عشوائيًا، علماً بأنه يمكن اختيار الصندوق A باحتمال p، والصندوق B باحتمال $q=1-p$، ثم وضعت الكرة المسحوبة فيه. ثم تكرر هذه العملية العديد من المرات. ليكن X_n يرمز إلى عدد الكرات في الصندوق A بعد تنفيذ الخطوة رقم n. يمكن إثبات أن العملية العشوائية $\{X_n : n=1,2,3,...\}$ تكون سلسلة ماركوف وأن احتمالات الانتقال تكون:

$$p_{ij}=\begin{cases} \dfrac{N-i}{N}p, & j=i+1,\ i=0,1,\cdots,N-1, \\ \dfrac{i}{N}q, & j=i-1, i=1,2,\cdots,N, \\ \dfrac{N-i}{N}q+\dfrac{i}{N}p, & j=i,\ i=0,1,\cdots,N, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

وأن م.ح.ن.

$$P=\begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{q}{N} & \frac{(N-1)q}{N}+\frac{p}{N} & \frac{(N-1)p}{N} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2q}{N} & \frac{(N-2)q}{N}+\frac{2p}{N} & \frac{(N-2)p}{N} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3q}{N} & \frac{(N-3)q}{N}+\frac{3p}{N} & \frac{(N-3)p}{N} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{(N-1)q}{N} & \frac{q}{N}+\frac{(N-1)p}{N} & \frac{p}{N} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & q & p \end{pmatrix}$$

مثال (٢,١٤)

بدأ الطفلان A ، وB اللعب بالمكعبات وكان مع A ثلاث مكعبات و كان مع B أربع مكعبات. حيث إن هذه اللعبة مكونة من عدة مراحل وفي كل مرحلة يحكي والدهما لغزًا فمن يستطيع الإجابة يأخذ مكعبًا من الآخر وتنتهي اللعبة عندما يخسر أحدهما كل ما لديه من مكعبات. ومن خبرة الوالد بطفليه استطاع أن يخمن أنه في كل مرحلة من مراحل هذه اللعبة سيجيب الطفل A بالإجابة الصحيحة باحتمال 0.6 أما الطفل B فيمكن أن يجاوب باحتمال 0.4 . ليكن C_n عبارة عن عدد المكعبات بحوزة A في المرحلة n .

إذن :

$$C_{n+1}=\begin{cases} C_n-1, & \text{باحتمال } 0.4 \\ C_n+1, & \text{باحتمال } 0.6 \end{cases}$$

من الواضح أن C_{n+1} تعتمد فقط على C_n ومن ثم فإن العملية العشوائية $\{C_n : n=1,2,\cdots\}$ تكون سلسلة ماركوف بفضاء الحالة $S=\{0,1,2,\cdots,7\}$ وفضاء المعلمة $T=\{1,2,\cdots\}$. احتمالات الانتقال لهذه السلسلة تكون مستقرة وتُعطى كالآتي:

$$p_{ij}=\begin{cases} 0.4, & j=i-1,\ i=1,2,\cdots,6, \\ 0.6, & j=i+1,\ i=1,2,\cdots,6, \\ 1, & j=i=0 \text{ or } i=j=7, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

ومن ثَم فإن م.ح.ن تكون:

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

لاحظ أن $p_{00}=p_{77}=1$. وهذا يعني أنه بمجرد أن تدخل العملية العشوائية أيًّا من الحالتين 0 أو 7 فإنها تبقى فيها ولن تتركها. يسمى مثل هذا النوع من الحالات بالحالات الماصة أو المستحوذة absorbing states.

تعريف (٢,٢) : (الحالة المستحوذة absorbing state)

تسمى الحالة $i \in S$ بالحالة الماصة (المستحوذة) إذا كان $p_{ii}=1$.

مثال (٢,١٥)

لنعد إلى المثال السابق ولكن لنفرض أن C_n عبارة عن العدد التراكمي للمكعبات مع الطفل A بعد المرحلة n. من المعلوم أن اللعبة ستنتهي عندما يفقد الطفل A كل ما لديه من مكعبات (أي يصبح لديه 3− من المكعبات) أو يكسب كل ما لدى B (أي يصبح لديه 4 مكعبات)، وتستمر اللعبة طالما مكسبه التراكمي بين هاتين القيمتين. ومن ثَم يمكن التحقق من أن العملية العشوائية $\{C_n : n=1,2,\cdots\}$ تكون سلسلة ماركوف بفضاء الحالة $S=\{-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$ وفضاء المعلمة $T=\{1,2,\cdots\}$. يمكن حساب احتمالات الانتقال لهذه السلسلة في الصورة التالية:

$$p_{ij}=\begin{cases}0.4, & j=i-1,\ i=-2,-1,0,1,2,3,\\ 0.6, & j=i+1,\ i=-2,-1,0,1,2,3,\\ 1, & j=i=-3 \text{ or } i=j=4,\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

ومن ثَم فإن م.ح.ن تكون:

$$P=\begin{array}{c} \\ -3\\ -2\\ -1\\ 0\\ 1\\ 2\\ 3\\ 4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccccc}-3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4\end{array}\\ \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0.4 & 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0.4 & 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0.6 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0.6 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0.6\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\end{array}$$

لاحظ أن $p_{-3-3}=p_{44}=1$ ومن ثَم فإن كلاً من الحالتين -3 و 4 تكون حالة ماصة.

مثال (٢,١٦)

بدأ الطفلان A ، وB اللعب وكان لدى A عدد a من المكعبات ومع B عدد b من المكعبات، حيث $a,b>0$. تتكون اللعبة من عدة مراحل وفي كل مرحلة يأخذ المجيب مكعبًا واحدًا من الآخر، وتنتهي اللعبة عندما يخسر أحدهما كل ما لديه من مكعبات. وقد علم مسبقًا أنه في كل مرحلة من مراحل هذه اللعبة سيكسب A باحتمال p أما B سيكسب باحتمال q ، حيث إن $p+q=1$. ليكن X_n عبارة عن عدد المكعبات مع A بعد تخطي المرحلة n. من المعلوم أن اللعبة ستنتهي عندما يخسر A كل ما لديه من مكعبات (أي يصبح مكسبه التراكمي $a-a=0$ مكعبا) أو يكسب كل ما لدى B (أي يصبح مكسبه $a+b=c$ مكعبًا)، وتستمر اللعبة طالما مكسبه التراكمي بين هاتين القيمتين. ومن ثَم فإن $\{X_n : n=1,2,\cdots\}$ تكون سلسلة ماركوف بفضاء الحالة $S=\{0,1,2,\cdots,c\}$ ، وفضاء

المعلمة $T = \{1,2,\cdots\}$. يمكن استنتاج احتمالات الانتقال لهذه السلسلة على الصورة:

$$p_{ij} = \begin{cases} p, & j = i+1,\ i = 1,2,\cdots,c-1, \\ q, & j = i-1,\ i = 1,2,\cdots,c-1, \\ 1, & j = i = 0 \ \text{or}\ i = j = c, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

ومن ثَم فإن م.ح.ن تكون:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ومن ثم فإن كلاً من الحالتين 0 ، c تكون حالة ماصة. تسمى العملية العشوائية $\{X_n : n = 1,2,\cdots\}$ بعملية المشي العشوائي بحواجز ماصة، كما تسمى أيضًا بعملية إفلاس (خراب) المقامر gambler ruin.

يعمم المثال التالي الأمثلة الثلاثة السابقة:

مثال (٢,١٧)

بالعودة إلى المثال السابق ولكن بفرض أن Y_n يرمز إلى المكسب التراكمي للطفل A بعد تخطي المرحلة n . إذا كان $Y_n = b$ فإن الطفل B سيفقد كل ما معه من مكعبات، أما إذا كان $Y_n = -a$ فإن الطفل A سيفقد كل ما معه من مكعبات. إذن العملية العشوائية $\{Y_n : n = 1,2,\cdots\}$ تكون سلسلة ماركوف بفضاء الحالة $S = \{-a, -a+1, \cdots, -1, 0, 1, \cdots, b\}$ ، وفضاء المعلمة $T = \{0,1,2,\cdots\}$. يمكن استنتاج احتمالات الانتقال لهذه السلسلة على الصورة:

$$p_{ij}=\begin{cases} q, & j=i-1,\ i=-a+1,\cdots,b-1,\\ p, & j=i+1,\ i=-a+1,\cdots,b-1,\\ 1, & j=i=-a \text{ or } i=j=b,\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

ومن ثَم فإن م.ح.ن تكون:

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ q & 0 & p & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & q & 0 & p & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & q & 0 & p\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

من الواضح أن كلاً من الحالتين $-a$ ، b تكون حالة ماصة. تسمى العملية العشوائية $\{Y_n : n=0,1,2,\cdots\}$ بعملية المشي العشوائي البادئة من عند نقطة الأصل، أي أن $Y_0=0$ ، بحواجز ماصة عند الموضعين $-a$ ، b.

مثال (٢,١٨)

ليكن $Y_1,Y_2,Y_3,\cdots$ متغيرات عشوائية مستقلة ومتطابقة ولكل منها التوزيع الاحتمالي التالي:

Y	0	1	2	3	4
p	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4

وبتعريف $X_0=0$ وأن:

$$X_{n+1}=\left(X_n+Y_{n+1}\right)\bmod 5$$

أي أنه إذا كان $Y_1=2, Y_2=2, Y_3=4, Y_4=1, Y_5=3, Y_6=4, \cdots$ فإن $X_0=0$ ، $X_1=2$ ، $X_2=1$ ، $X_3=0$ ، $X_4=1$ ، $X_5=4$ ، $X_6=3$ ، .... ومن ثَم فإن $\{X_n : n=0,1,\cdots\}$ تكون سلسلة ماركوف بفضاء الحالة و م.ح.ن.

$$P = \begin{array}{c|ccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 0 & p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ 1 & p_4 & p_0 & p_1 & p_2 & p_3 \\ 2 & p_3 & p_4 & p_0 & p_1 & p_4 \\ 3 & p_2 & p_3 & p_4 & p_0 & p_1 \\ 4 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_0 \end{array}$$

من الواضح أن المصفوفة P تكون مصفوفة عشوائية مزدوجة كما في مثال (٢,٥).

سنقدم في بقية هذا البند أمثلة لسلاسل ماركوف بفضاء حالة غير منته.

مثال (٢,١٩)

بالعودة إلى عملية ذي الحدين المقدمة في المثال (٢,٣)، قد تم توضيح أن $S = \{0,1,\cdots\}$. حيث إن احتمالات الانتقال هي:

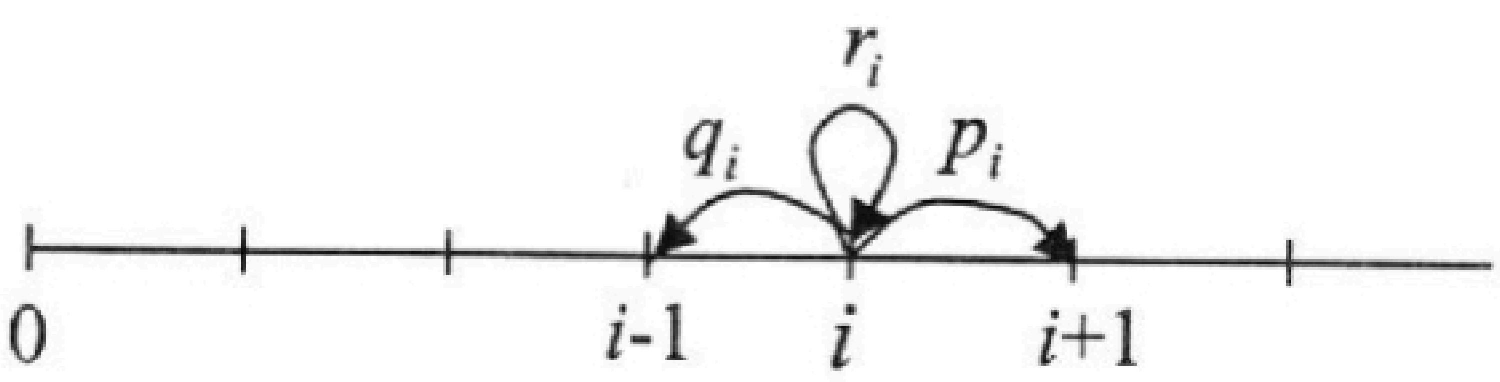
$$p_{ij} = P(S_{n+1} = j \mid S_n = i) = \begin{cases} p, & j = i+1, \\ 1-p, & j = i, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

إذن فإن م.ح.ن لهذا المثال تكون غير منتهية وتأخذ الصورة التالية:

$$P = \begin{pmatrix} 1-p & p & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1-p & p & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1-p & p & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

مثال (٢,٢٠): (المشي العشوائي العام General random walk)

يمكن تعميم المشي العشوائي البسيط المعرف في المثال (٢,٣) لوصف حركة انتقال جزيء من الموضع i في الخطوة n إلى أي من الموضعين $i+1$ باحتمال p_i أو $i-1$ باحتمال q_i أو يظل في موضعه باحتمال r_i (انظر الرسم في الشكل ٢,٣).



شكل (٣,٢): المشي العشوائي العام.

بفرض أن $r_0 + p_0 = 1$ ، $q_i + r_i + p_i = 1$ ، $i \geq 1$ فإن م.ح.ن الجديدة تأخذ الصورة التالية:

$$P = \begin{pmatrix} r_0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ q_1 & r_1 & p_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & q_2 & r_2 & p_2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & q_3 & r_3 & p_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

مثال (٢,٢١): (عملية المحاولات المستقلة)

ليكن X_0 ، X_1 ، ... عبارة عن متغيرات عشوائية منفصلة مستقلة ومتطابقة بتوزيع احتمالي $P(X_n = k) = a_k, k = 0,1,\cdots$. من ثَم وبناء على أن X_{n+1} لا يعتمد على X_0 ، X_1 ، ... ،X_{n-1} فإن:

$$P(X_{n+1} = j \mid X_0 = i_0, \cdots, X_n = i) = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = a_j, \ (j \geq 0).$$

ومن ثم فإن $\{X_n ; n = 0,1,\cdots\}$ تكون سلسلة ماركوف وأن م.ح.ن. هي:

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & \cdots \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \end{array} & \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \end{array}$$

نلاحظ أن جميع صفوف المصفوفة P تكون متطابقة وأن $P^m = P$ لجميع $m \geq 1$. وبالعكس إذا كانت $\{X_n ; n = 0,1,\cdots\}$ سلسلة ماركوف بـ م.ح.ن. جميع صفوفها متطابقة فإن X_0 ، X_1 ، ... تكون عبارة عن متغيرات عشوائية منفصلة مستقلة ولها نفس

التوزيع الاحتمالي (انظر تمرين (٢,١٣)).

مثال (٢,٢٢)

أثبت أن العملية العشوائية $\{Z_n : n = 1,2,3,...\}$ تكون سلسلة ماركوف- ثم أوجد م.ح.ن لها، حيث أن $Z_n = Z_{n-1} + X_n$ وأن المتغيرات العشوائية X_1، X_2، ... تكون مستقلة ومتطابقة ولها دالة الكتلة الاحتمالية $P(X_i = k) = p_k , k = 0,1,2,...$، $i = 1,2,...$.

الحل

في هذا المثال نجد أن:

$$\begin{aligned} p_{ij} &= P(Z_{n+1} = j \mid Z_n = i) \\ &= P(Z_n + X_{n+1} = j \mid Z_n = i) \\ &= P(X_{n+1} = j - i) \end{aligned}$$

ومن ثَم فإن:

$$p_{ij} = P(X_{n+1} = j - i) = p_{j-i} \;, j \geq i, i = 0,1,...$$

وأيضًا:

$$p_{ij} = 0 \;, j < i, i = 1,2,...$$

وهذا يعني أن الاحتمال الشرطي $p_{ij} = P(Z_{n+1} = j \mid Z_n = i)$ يعتمد فقط على حالة العملية في الخطوة Z_n و لا يعتمد على حالاتها في الخطوات السابقة (لا يعتمد على قيم المتغيرات Z_1، Z_2، ... Z_{n-1}) ومن ثم فإن العملية العشوائية $\{Z_n : n = 1,2,3,...\}$ تكون متسلسلة ماركوف بفضاء الحالة $S = \{0,1,2,3,...\}$، وأن م.ح.ن تأخذ الصورة التالية:

$$P = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \cdots \\ 0 & p_0 & p_1 & p_2 & \cdots \\ 0 & 0 & p_0 & p_1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & p_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

لاحظ أنه يمكن كتابة Z_n بصورة أخرى مكافئة وهي $Z_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. فإذا فرضنا أن، على سبيل المثال، المتغيرات العشوائية X_1 ، X_2 ، ... تكون مستقلة ومتطابقة وكل منهم يسلك توزيع بواسون بالمتوسط μ ، إذن فإن العملية العشوائية $\{Z_n : n = 1,2,3,...\}$ تكون سلسلة ماركوف بفضاء الحالة $S = \{0,1,2,...\}$ وفضاء المعلمة $T = \{1,2,3,...\}$. يمكن استنتاج احتمالات الانتقال في الصورة التالية:

$$p_{ij} = P(X_{n+1} = j-i)$$
$$= \begin{cases} \dfrac{\mu^{j-i}}{(j-i)!}\, e^{-\mu}, & j \geq i, \\ 0, & j-i < 0 \end{cases}$$

يمكن تطبيق هذه النتيجة على أي متتابعة من المتغيرات العشوائية المستقلة والمتطابقة.

تمرين (٢,٢)

لنفرض أنه في المثال السابق تكون المتغيرات العشوائية X_1 ، X_2 ، ... مستقلة ومتطابقة ولها دالة الكتلة الاحتمالية التالية:

$$P(X = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}, k = 0,1,2,...$$

أوجد م.ح.ن لسلسلة ماركوف $\{Z_n : n = 1,2,3,...\}$.

مثال (٢,٢٣)

لنفرض أن متتابعة مستقلة تكونت من عملية إلقاء قطعة عملة معدنية، حيث إن احتمال ظهور صورة في أي محاولة ثابت ويساوي p . ليكن X_n يرمز إلى عدد مرات ظهور صورة مطروحًا منه عدد مرات ظهور كتابة بعد تنفيذ الرمية رقم n . يمكن إثبات أن العملية العشوائية $\{X_n : n = 1,2,3,...\}$ تكون سلسلة ماركوف بفضاء الحالة $S = \{0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$ وفضاء المعلمة $T = \{1, 2, 3, \cdots\}$ وأن احتمالات الانتقال تعطى على الصورة التالية:

$$p_{ij}=\begin{cases}p, & j=i+1,\\ 1-p, & j=i-1,\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

ومن ثَم فإن م.ح.ن تأخذ الصورة التالية:

$$P=\begin{array}{c} \\ \cdots \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}\cdots & -1 & 0 & 1 & \cdots\end{array}\\ \begin{pmatrix}\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & 0 & p & 0 & \cdots\\ \cdots & 1-p & 0 & p & \cdots\\ \cdots & 0 & 1-p & 0 & \cdots\\ \cdots & 0 & 0 & 1-p & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\end{pmatrix}\end{array}$$

مثال (٢,٢٤): (صفوف انتظار بزمن منفصل)

ليكن Z_t عدد المسافرين المنتظرين في صف انتظار عند أحد محطات سيارات الأجرة عند اللحظة t. تصل سيارات الأجرة عند الأزمنة $T_n; n=1,2,\cdots$ وأن كل سيارة إما أن تأخذ راكباً واحداً على الأكثر باحتمال 1 أو تترك المحطة بدون انتظار لمسافر (إذا لم يكن هناك إمكانية) باحتمال 1. ليكن V_n عبارة عن عدد المسافرين الذين يصلون إلى المحطة في الفترة الزمنية $[T_n, T_{n+1})$، حيث إن $P(V_n=k)=a_k$ لكل n. وبفرض $X_n=Z_{T_n^+}$ يرمز إلى عدد المسافرين المنتظرين عند المحطة قبل وصول السيارة رقم $n+1$ مباشرة، أي عدد المسافرين المنتظرين عند الحد الأعلى للفترة $[T_n, T_{n+1})$. يوضح الشكل (٢,٤) تحقيقا للقيم للمتغير العشوائي X_n. يمكن التحقق من أن X_{n+1} ترتبط بـ X_n بالعلاقة التالية:

$$X_{n+1}=X_n+V_n-\min\{1, X_n+V_n\}$$

ومن ثم فإن $\{X_n\}$ تكون سلسلة متجانسة لماركوف. ومن ثَم فإن م.ح.ن. لها تكون:

$p_{00}=P($ (وصول مسافر واحد إلى المحطة وترك واحد المحطة) أو (عدم وصول مسافر) $)$

$\quad =a_0\cdot 1+a_1\cdot 1$

$p_{01}=P($ وصول مسافرين اثنين إلى المحطة وترك أحدهما المحطة $)$

$= a_2$

$p_{03} = P($ وصول ثلاثة مسافرين إلى المحطة وترك أحدهما المحطة $)$

$= a_3$

$\cdots$

$p_{10} = P($ عدم وصول أي مسافر إلى المحطة وترك واحد المحطة $)$

$= a_0 \cdot 1$

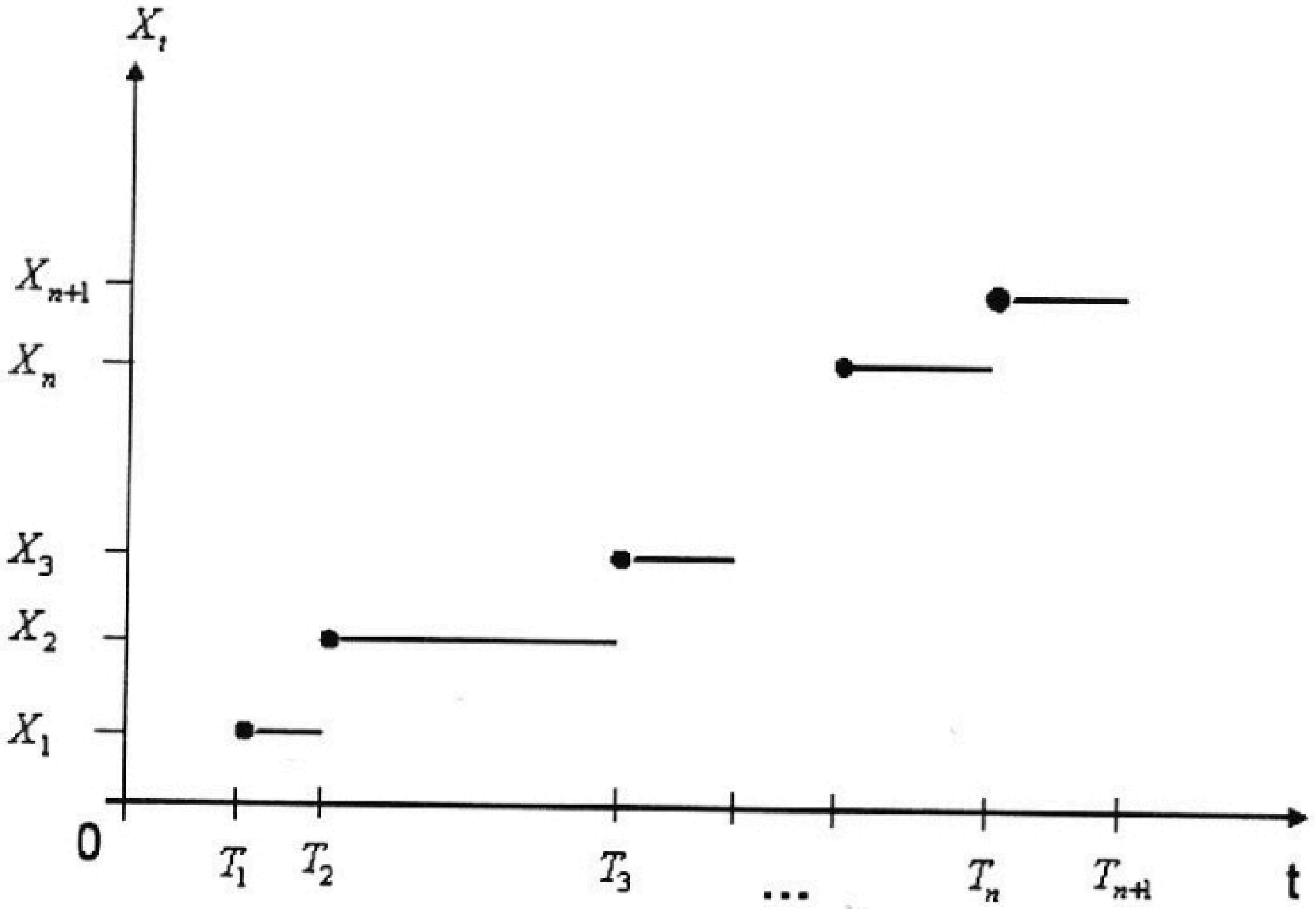
$p_{11} = P($ وصول مسافر واحد إلى المحطة وترك واحد المحطة $)$

$= a_1$

$p_{12} = P($ وصول مسافرين اثنين إلى المحطة وترك واحد المحطة $)$

$= a_2$

$\cdots$



شكل (٢,٤): تحقيق لقيم المتغير العشوائي X_n .

كما يمكن استنتاج أن:

$$p_{20} = 0,\ p_{21} = a_0,\ p_{22} = a_1, \cdots$$

وفي النهاية نحصل على م.ح.ن. في الصورة التالية:

$$P=\begin{pmatrix} a_0+a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

مثال (٢,٢٥): (نظام محسن)

يمكن تعميم النموذج المقدم في المثال (٢,٢٤) وذلك بفرض أن سيارة الأجرة ستأخذ مسافراً واحداً باحتمال p ، أو تترك المحطة بدون أن تأخذ مسافرين مع وجود مسافرين عند المحطة باحتمال $1-p$ ، أو تترك المحطة بدون انتظار باحتمال 1 عندما لا يوجد مسافرين. يمكن استنتاج م.ح.ن. في هذه الحالة على الصورة التالية:

$$P=\begin{pmatrix} a_0+a_1p & a_2p+a_1(1-p) & a_3p+a_2(1-p) & \cdots \\ a_0p & a_1p+a_0(1-p) & a_2p+a_1(1-p) & \cdots \\ 0 & a_0p & a_1p+a_0(1-p) & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

يجدر بنا الاهتمام دائمًا أن نتحقق من أن مجموع عناصر أي صف من صفوف م.ح.ن. يساوي واحداً.

مثال (٢,٢٦): (زمن الحياة المتبقي remaining life time)

لنفرض أنه يوجد وحدة معينة من وحدات آلة في الاستخدام، وأنها عندما تتعطل هذه الوحدة يتم استبدالها مباشرة بوحدة جديدة مماثلة لها، وعندما تتعطل الوحدة الجديدة يتم استبدالها مرة أخرى مباشرة بوحدة جديدة وهكذا تتم عملية الاستبدال كلما تعطلت الوحدة الجديدة. ليكن p_k عبارة عن احتمال أن الوحدة الجديدة تدوم حتى k وحدة زمنية، $k=1,2,\cdots$. لنفرض أن X_n يرمز إلى زمن الحياة المتبقي للوحدة في الاستخدام (المستخدمة) عند اللحظة n . إذن:

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n - 1, & \text{if } X_n \geq 1, \\ Z_n - 1, & \text{if } X_n = 0, \end{cases}$$

حيث إن Z_n عبارة عن زمن الحياة المتبقي للوحدة التي تم تركيبها عند اللحظة n. حيث إن أزمنة حياة الوحدات التي تم تركيبها تكون مستقلة، فإن Z_{n+1} يكون أيضًا مستقلاً عن X_0، X_1، ...، X_n. من ثَم فإن $\{X_n\}$ تكون سلسلة ماركوف وأن فضاء الحالة لها هو $S = \{0,1,2,\cdots\}$. ليكن p_{ij} عبارة عن احتمال الانتقال من الحالة i إلى الحالة j. إذن لأي $i \geq 1$ يكون:

$$\begin{aligned} p_{ij} &= P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) \\ &= P(X_n - 1 = j \mid X_n = i) \\ &= P(X_n = j+1 \mid X_n = i) \\ &= \begin{cases} 1, & \text{if} \quad j = i-1, \\ 0, & \text{if} \quad j \neq i-1, \end{cases} \end{aligned}$$

أما إذا كان $i = 0$ فإن:

$$\begin{aligned} p_{ij} &= P(X_{n+1} = j \mid X_n = 0) \\ &= P(Z_n - 1 = j \mid X_n = 0) \\ &= P(Z_n = j+1) \\ &= p_{j+1} \end{aligned}$$

وذلك لأي $j = 0,1,2,\cdots$. ومن ثم فإن م.ح.ن. تكون:

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & \cdots \end{array} \\ \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \end{array}$$

وقبل أن نختم هذا الجزء سنعطي مثالين لسلاسل ماركوف التي يمكن أن تكون غير

متجانسة.

مثال (٢,٢٧)

لنفرض أن م.ح.ن. لمباراة الصدفة في المثال (١,١٢). إذا كان مقدار فوز أحد المتبارين عند اللحظة n هو i، فإن مقدار الفوز عند اللحظة $n+1$ سيصبح إما $j=i+1$ أو $j=i-1$ باحتمال $\frac{1}{2}$ لكل منهما. ومن ثَم فإن:

$$p_{ij}=\begin{cases}\frac{1}{2}, & \text{if } j=i+1 \text{ or } j=i-1\,, \\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

والآن سنعدل قوانين هذه اللعبة لشرح عملية ماركوف غير المتجانسة. في قوانين اللعبة الجديدة، تلقى قطعة عملة معدنية عند اللحظة $n=0$، وتلقى قطعتي عملة عند اللحظة $n=1$، وتلقى ثلاث قطع عملة عند اللحظة $n=2$ ، ...، إلخ. سنكسب ريالاً واحداً إذا ظهرت صورة على كل قطعة، ونخسر ريالاً واحداً ماعدا ذلك. ليكن X_n يرمز إلى المكسب التراكمي بعد اللحظة n. من السهل التحقق من أن قيمة X_{n+1} تعتمد فقط على قيمة X_n، ولاتعتمد على قيم $X_{n-1},\cdots,X_0$، بناء على العلاقة التالية:

$$X_{n+1}=\begin{cases}X_n+1, & \text{إذا ظهرت جميع الصور عند } n+1 \\ X_n-1, & \text{إذا ظهر على الأقل كتابة واحدة عند } n+1\end{cases}$$

ومن ثم فإن $\{X_n : n=0,1,2,\cdots\}$ تكون سلسلة ماركوف، ويمكن حساب احتمالات انتقالاتها في خطوة كالآتي:

$$p_{ij}^{(n,n+1)}=P\left(X_{n+1}=j\,|\,X_n=i\right)$$

إذا كانت $j=i+1$ فإن:

$$p_{ij}^{(n,n+1)}=\mathrm{P}\{\text{ظهور صور على جميع القطع المعدنية وعددها } n+2\}$$

وأما إذا كان $j=i-1$ فإن:

$$p_{ij}^{(n,n+1)}=\mathrm{P}\{\text{ظهور كتابة على الأقل على قطعة واحدة من بين } n+2 \text{ قطعة}\}$$

ومن ثَم يمكن الحصول على احتمالات الانتقال بخطوة في الصورة التالية:

$$p_{ij}^{(n,n+1)}=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}, & \text{if } j=i+1 \quad \text{ظهور جميع الصور}\\ 1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}, & \text{if } j=i-1 \quad \text{ظهور على الأقل كتابة واحدة}\\ 0, & \text{otherwise.} \quad \text{خلاف ذلك}\end{cases}$$

ومن الواضح أن هذه الاحتمالات تعتمد على n ومن ثَم فهي غير مستقرة ومن ثم فإن هذه العملية تكون غير متجانسة.

مثال (٢,٢٨)

عدد المكالمات الهاتفية التي تأتي إلى تحويلة هاتفية في مكتب إحصائي خلال أي دقيقة تكون عبارة عن متغير عشوائي يأخذ أحد القيم التالية 0، 1، 2 بالاحتمالات 0.80، 0.15، 0.05 على الترتيب. لنفرض أن عدد المكالمات التي تصل في دقيقة واحدة يكون مستقلاً عن عدد المكالمات خلال أي دقيقة أخرى، وليكن X_n يرمز إلى عدد المكالمات الكلي بعد n دقيقة. الحالات الممكنة للعملية تكون 0، 1، 2، 3، ... . لنفرض أن عدد المكالمات التي وصلت إلى التحويلة خلال n دقيقة هو i ، فإن القيم الممكنة لـ X_{n+1} ستكون إما i أو $i+1$ أو $i+2$ وذلك إذا لم تصل مكالمات، أو تصل مكالمة واحدة أو تصل مكالمتان إلى التحويلة خلال الدقيقة التالية. العملية العشوائية $\{X_n, n=1,2,\cdots\}$ تكون متجانسة بالنسبة للزمن واحتمالات انتقالاتها هي:

$$p_{ij}=\begin{cases}0.80, & \text{if } j=i,\\ 0.15, & \text{if } j=i+1,\\ 0.05, & \text{if } j=i+2,\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

نلاحظ أن معدلات وصول المكالمات إلى التحويلة يمكن أن تتغير مع الزمن أثناء اليوم، فعلى سبيل المثال يمكن أن تكون احتمالات عدم وصول مكالمات أو وصول مكالمة واحدة أو وصول مكالمتين خلال ساعات الصباح على الترتيب هي 0.6، 0.3، 0.1 أما خلال ساعات المساء فتكون كما هي. في هذه الحالة تتغير احتمالات الانتقال للعملية من 0.8، 0.15، 0.05 إلى 0.6، 0.3، 0.1 وهذا التغير سيجعل العملية العشوائية غير متجانسة في الزمن.

(٢,٣) احتمال الانتقال في الخطوة النونية
The *n*-step transition probability

احتمال انتقال العملية العشوائية $\{X_n : n = 0,1,2,\cdots\}$ من الحالة i إلى الحالة j بعد عدد n من الخطوات يسمى باحتمال الانتقال في الخطوة النونية، وسنرمز لـه بـالرمز $p_{ij}^{(n)}$ ويعرف بالعلاقة التالية:

$$p_{ij}^{(n)} = P(X_{n+m} = j \mid X_m = i), \quad n \geq 0, \ i, j = 0,1,2,...$$

يشير هذا الاحتمال إلى احتمال انتقال العملية العشوائية من الحالة i إلى الحالة j بعد عدد n من الانتقالات. بالمثل لحالة احتمال الانتقال من حالة إلى أخرى في خطوة واحـدة، يمكن كتابة احتمالات انتقال العملية العشوائية بعد n من الخطوات في شكل مصفوفة، نرمز لها بالرمز $P^{(n)}$، على الصورة التالية:

$$P^{(n)} = \begin{pmatrix} p_{00}^{(n)} & p_{01}^{(n)} & p_{02}^{(n)} & \cdots \\ p_{10}^{(n)} & p_{11}^{(n)} & p_{12}^{(n)} & \cdots \\ p_{20}^{(n)} & p_{21}^{(n)} & p_{22}^{(n)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

تسمى المصفوفة $P^{(n)}$ بمصفوفة احتمالات الانتقال بعد الخطوة n.

ملاحظة (٢,١)

١- إذا كانت $n = 1$، فإن $p_{ij}^{(n)}$ يصبح احتمال الانتقال من الحالة i إلى الحالة j في خطوة واحدة والذي رمزنا له سابقا بالرمز p_{ij}.

٢- إذا كانت $n = 0$، فإن:

$$p_{ij}^{(0)} = P(X_0 = j \mid X_0 = i) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

٣- لكل $n = 0,1,\cdots$، فإن المصفوفة $P^{(n)}$ تكون مصفوفة عشوائية ومن ثم تحقق الخاصيتين (٢,٢) و (٢,٣).

تعريف مصفوفة الاحتمال بـــ n من الخطوات تكون أبسط من عملية حسابها، تعطى معادلات شابمان - كولوموغروف (Chapman – Kolomogorov) علاقات تكراريـــة لحساب احتمالات الانتقال بعد n من الخطوات والتي تعتمد على حقيقة أن انتقال العمليـــة العشوائية من الحالة i إلى الحالة j بعد $n+m$ من الخطوات يقتضي وجودهـــا في حالـــة أخرى ولتكن k بعد n خطوة.

نظرية (٢,١)

(معادلات شابمان - كولوموغروف Chapman-Kolmogorov equations)

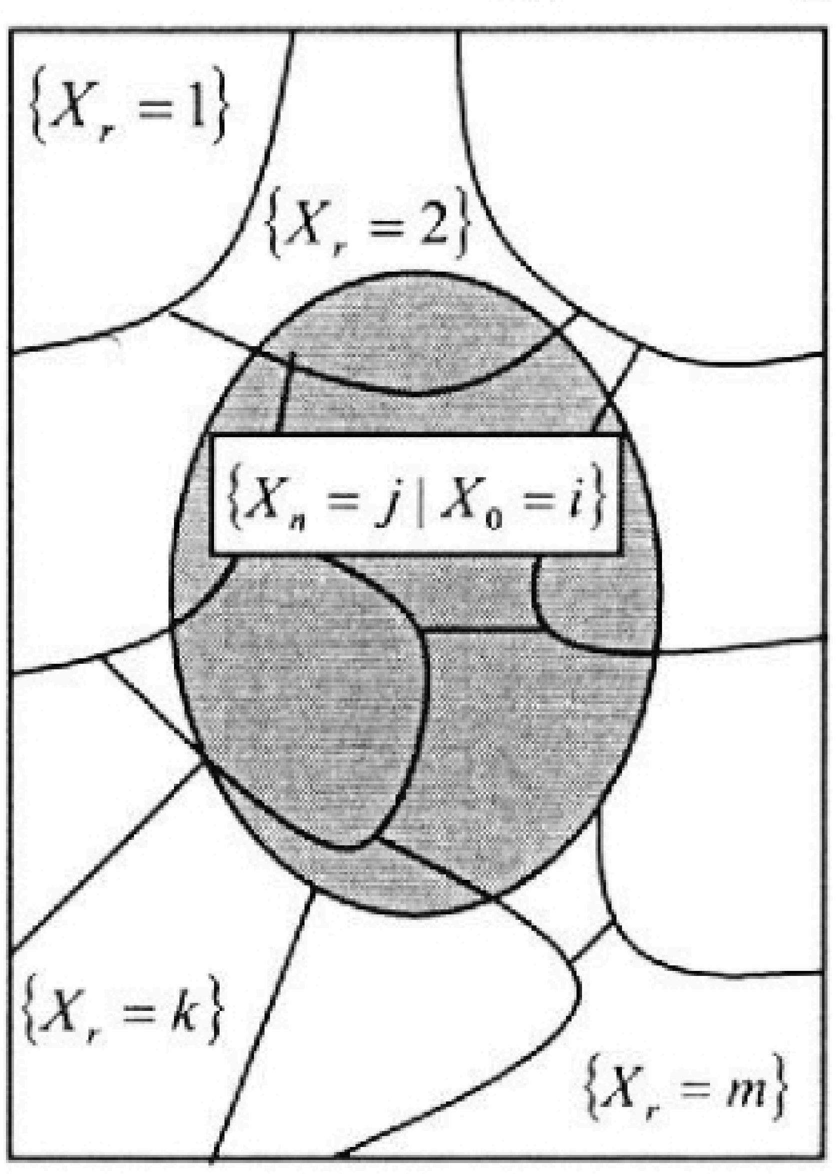
إذا كانت $\{X_n : n = 0,1,2,\cdots\}$ سلسلة ماركوف بعدد حـــالات محـــدودة m، وم.ح.ن. $P = \left(p_{ij}\right)$، فإن:

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{m} p_{ik}^{(r)}\; p_{kj}^{(n-r)}, \quad \forall\, r = 1,2,\ldots,n-1.$$

البرهان

حيث إن:

$$p_{ij}^{(n)} = P\left(\{X_n = j \mid X_0 = i\}\right)$$



حتى تنتقل العملية العشوائية من الحالة i إلى الحالة j بعد n من الخطوات يجب أن تنتقل من الحالة i إلى حالة من حـــالات العمليـــة ولتكن k $(k = 1,2,\cdots,m)$ بعـــد r مـــن الخطـــوات $(r = 1,2,\cdots,n-1)$ ثم تنتقل بعد ذلك من الحالة k إلى الحالة j بعد $(n-r)$ من الخطوات. يوضـــح الـــشكل المقابل وضع العمليـــة بعـــد عـــدد r مـــن الانتقالات.

باستخدام قانون الاحتمال الكلي يمكن كتابة:

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{m} P(X_n = j, X_r = k \mid X_0 = i) \ , \ r = 1,2,\cdots,n-1,$$

ومن خواص الاحتمال الشرطي لدينا $P(A \cap B \mid C) = P(A \mid B \cap C)P(B \mid C)$، ومن ثَم نحصل على:

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{m} P(X_n = j \mid X_r = k, X_0 = i)P(X_r = k \mid X_0 = i)$$

ومن خاصية ماركوف فإن:

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(n)} &= \sum_{k=1}^{m} P(X_n = j \mid X_r = k)P(X_r = k \mid X_0 = i) \\ &= \sum_{k=1}^{m} p_{kj}^{(n-r)} p_{ik}^{(r)} \end{aligned}$$

تسمى هذه المعادلات بمعادلات شابمان -كولوموغروف لسلسلة ماركوف المتجانسة. وهذه المعادلات تعني أنه لكي تنتقل العملية العشوائية من الحالة i إلى الحالة j بعد n من الخطوات فإنها يجب أن تنتقل أولاً من الحالة i إلى الحالة k بعد r من الخطوات (حيث إن $1 \le r \le n-1$) ثم تنتقل بعد ذلك من k إلى j بعد $n-r$ من الخطوات.

نلاحظ ما يلي:

١- إذا وضعنا $r = 1$ فإننا نحصل على:

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{m} p_{ik} \ p_{kj}^{(n-1)}.$$

٢- إذا وضعنا $r = n-1$ فإننا نحصل على:

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{m} p_{ik}^{(n-1)} \ p_{kj}.$$

يمكن صياغة وبرهان النظرية التالية كنتيجة منطقية للنظرية السابقة.

نظرية (٢,٢)

إذا كانت $P = \left(p_{ij}\right)$ هي م.ح.ن. لأحد سلاسل ماركوف المحدودة، فإن مصفوفة احتمالات الانتقال بعد n من الخطوات $P^{(n)}$ تكون :

$$P^{(n)} = P^n$$

البرهان

كما ذكرنا في الصفحة السابقة، يمكن الحصول على البرهان كنتيجة مباشرة من معادلات شابمان -كولوموغروف بالاستنتاج الرياضي على n.

ومن ثَم فإنه يمكن استنتاج $P^{(n)}$ بحساب حاصل ضرب مصفوفة احتمال الانتقالات بعد خطوة P بضربها في نفسها عدد n من المرات. فمثلاً :

$$P^{(2)} = P \cdot P = P^2$$

$$P^{(3)} = P \cdot P \cdot P = P^3$$

وهكذا يمكن حساب مصفوفة احتمالات الانتقال بعد أي عدد محدد من الخطوات.

مثال (٢,٢٩)

لتكن $\{X_n\}$ سلسلة ماركوف بفضاء الحالة $S = \{1,2\}$ وأن م.ح.ن. لها هي:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ونريد حساب $P(X_5 = 2 \mid X_3 = 1)$.

الحل

من الواضح أن المطلوب هو حساب $p_{12}^{(2)}$ والذي يكون عبارة عن أحد عناصر المصفوفة $P^{(2)} = P^2 = P \cdot P$.

$$P^2 = P \cdot P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

ومن ثَم فإن $p_{12}^{(2)} = \frac{1}{4}$ والتي تعني أنه باحتمال $\frac{1}{4}$ ستنتقل العملية العشوائية من الحالة 1 إلى الحالة 2 في خطوتين.

مثال (٢,٣٠)

بالعودة إلى المثالين (٢,٢) و (٢,٩) حيث إن X_n يشير إلى عدد الصور التي نحصل عليها عند إلقاء قطعة عملة معدنية أربع مرات. فكانت $\{X_n\}$ سلسلة ماركوف بفضاء الحالة $S=\{0,1,2,3,4\}$ و أن م.ح.ن. على الصورة:

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ومن ثَم فإنه يمكن حساب م.ح.ن. بخطوتين $P^{(2)}=P^2$ لنحصل على:

$$P^2=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{8} & 0 & \frac{3}{8} & 0 \\ \frac{1}{8} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{3}{8} & 0 & \frac{5}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

ومن ثَم فإنه يمكن تفسير بعض الاحتمالات كالآتي:

١- $p_{00}^{(2)}=1/4$ تعني أنه بشرط عدم ظهور صورة بعد أحد الرميات فإن احتمال عدم ظهور صورة بعد رميتين أخريين يساوي $1/4$.

٢- $p_{42}^{(2)}=3/4$ تعني أنه بشرط ظهور أربع صور بعد أحد الرميات فإن احتمال ظهور صورتين بعد رميتين أخريين يساوي $3/4$.

٣- $p_{44}^{(2)}=1/4$ تعني أنه بشرط ظهور أربع صور بعد أحد الرميات فإن احتمال ظهور

أربع صور بعد رميتين أخريين يساوي $1/4$.

٤- $p_{33}^{(2)} = 5/8$ تعني أنه بشرط ظهور ثلاث صور بعد أحد الرميات فإن احتمال ظهـــور ثلاث صور بعد رميتين أخريين يساوي $5/8$.

مثال (٢,٣١)

لنعد إلى المثال (٢,٦) حيث تم استخدام أحد سلاسل ماركوف لوصف ظاهرة تكرار الأيام الجافة والماطرة، وللتذكير كنا قد رمزنا لليوم الجاف بالحالة 1 أما الجو الماطر بالحالة 0. وكانت م.ح.ن. عبارة عن:

$$P = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

ومن ثَم فإن م.ح.ن. بعد خطوتين تصبح:

$$P^2 = P \cdot P = \begin{pmatrix} 0.72 & 0.28 \\ 0.56 & 0.44 \end{pmatrix}$$

ومن ثَم فإن:

١- $p_{00}^{(2)} = 0.72$ تعني أنه بشرط أن الجو يكون ماطرًا اليوم فإنه سيكون مـــاطراً بعـــد يومين آخرين باحتمال 0.72. أو بمعنى آخر، بشرط أن الجو كان ماطرًا في يومٍ ما فإنه سيكون ماطراً بعد يومين آخرين باحتمال 0.72 .

٢- $p_{11}^{(2)} = 0.44$ تعني أنه بشرط أن الجو اليوم كان جافًا فإنه سيكون جافاً بعد يـــومين آخرين باحتمال يساوي 0.44.

يمكن حساب مصفوفة احتمالات الانتقال بعد أربعة أيام $P^{(4)} = P^4$ كالآتي:

$$P^4 = P^2 \cdot P^2 = \begin{pmatrix} 0.68 & 0.32 \\ 0.65 & 0.35 \end{pmatrix}$$

وللحصول على مصفوفة احتمالات الانتقال بعد خمسة أيام يمكن استخدام أي مـــن العلاقات التالية: $P^{(5)} = P^4 \cdot P$، أو $P^{(5)} = P^{(2)} \cdot P^{(3)}$ حيث إن $P^{(3)} = P^{(2)} \cdot P$.

تمرين (٢,٣)

في المثال السابق أوجد ما يلي:

١- قيم كل من $p_{10}^{(4)}$ ، $p_{01}^{(4)}$ ثم فسر النتائج.

٢- احتمال أن الجو سيكون ماطرًا في الثالث من يوليو، بشرط أنه كان جافاً في الأول من يوليو.

٣- احتمال أن الجو سيكون جافاً في الثاني من يوليو بشرط أنه كان ماطرًا في الأول من يوليو.

٤- احتمال أن الجو سيكون ماطرًا في الخامس من يوليو بشرط أنه كان ماطرًا في الأول من يوليو.

٥- احتمال أن الجو سيكون جافاً في التاسع من يوليو بشرط أنه كان جافاً في الخامس من يوليو.

٦- احتمال أن الجو سيكون جافاً في السادس من يوليو بشرط أنه كان جافاً في الثاني من يوليو.

٧- احتمال أن الجو سيكون جافاً في السادس من يوليو بشرط أنه كان جافاً في الثاني من يوليو.

٨- احتمال أن الجو سيكون جافاً بعد أربعة أيام بشرط أنه كان اليوم جافاً.

مثال (٢,٣٢)

يوجد ثلاثة متاجر للأطعمة A، B، C في منطقة معينة داخل إحدى المدن. وفي كل شهر يحتفظ المتجر A بنسبة 90 % من زبائنه ويفقد منهم نسبة 10% للمتجر B، أما المتجر B فيحتفظ على نسبة 5 % من زبائنه ويفقد 85 % للمتجر A و 10% منهم للمتجر C، أما المتجر C فيحتفظ على نسبة 40 % من زبائنه ويفقد 50 % للمتجر A و10 % منهم للمتجر B.

١- صغ هذه العملية باستخدام سلسلة ماركوف، وأوجد م.ح.ن. لها.

٢- أوجد نسبة الزبائن الذين يتحولون بعد شهرين من:

(أ) المتجر A إلى المتجر B . (ب) المتجر C إلى المتجر A .

الحل

١- يمكن تمثيل هذه العملية بسلسلة ماركوف ذات ثلاث حالات "1 = المتجر A " ، "2 = المتجر B " ، " 3 = المتجر C "، ليكن X_n عبارة عن المتجر الذي يذهب إليه أحد الزبائن في الشهر رقم n، ويمكن استنتاج م.ح.ن. على الصورة التالية:

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0.90 & 0.10 & 0 \\ 0.85 & 0.05 & 0.10 \\ 0.50 & 0.10 & 0.40 \end{pmatrix} \end{array}$$

٢- من الفقرة (١) يمكن الحصول على مصفوفة احتمالات الانتقال بعد خطوتين $P^{(2)} = P \cdot P$،

$$P^2 = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0.895 & 0.095 & 0.010 \\ 0.857 & 0.098 & 0.045 \\ 0.735 & 0.095 & 0.170 \end{pmatrix} \end{array}$$

ومن ثم يمكن الحصول على :

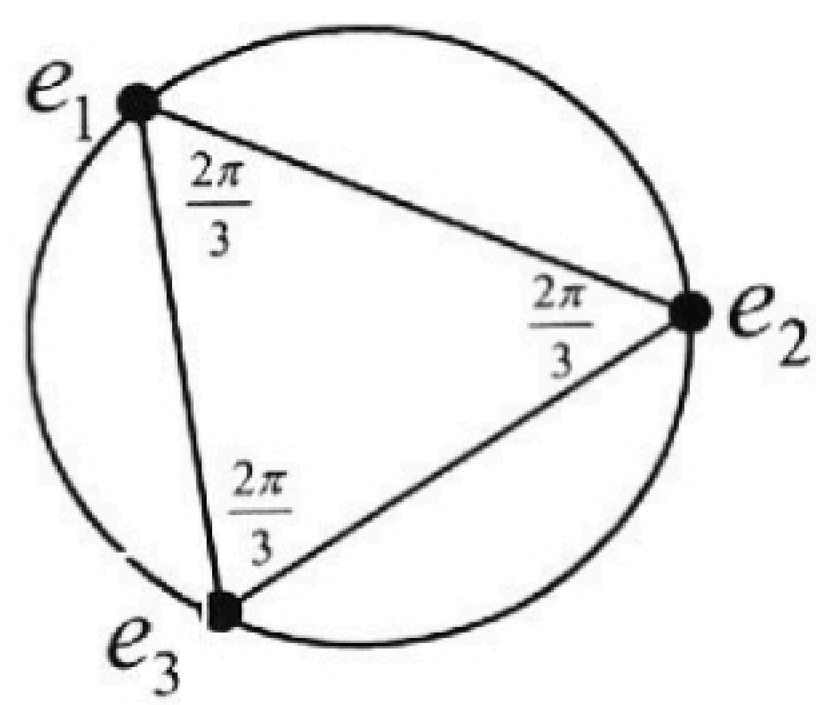
(أ) $p_{12}^{(2)} = 0.095$ والذي يعني أن نسبة 9.5% من زبائن المتجر A ستتحول إلى المتجر B بعد شهرين.

(ب) $p_{31}^{(2)} = 0.735$ وهذا يعني أن نسبة 73.5% من زبائن المتجر C ستتحول إلى المتجر A بعد شهرين.

يمكن استخدام بعض طرق الجبر الخطي لحساب مصفوفة احتمالات الانتقال بعد n من الخطوات $P^{(n)}$ من مصفوفة احتمالات الانتقال بعد خطوة واحدة P . سنقوم بتوضيح هذه الطريقة في المثال التالي:

مثال (٢,٣٣)

تتحرك مركبة على دائرة ويمكن أن تتوقف عند واحدة من المواضع الثلاثة e_1 أو e_2 أو e_3، حيث إن الزاوية بين أي موضعين من هذه المواضع تساوي $\frac{2\pi}{3}$ (انظر شكل (٢,٥)). تم إلقاء قطعة عملة معدنية وبناء على النتيجة سيتم تحديد اتجاه حركة المركبة. فإذا حصلنا على صورة فتتحرك المركبة في اتجاه حركة عقارب الساعة أما إذا حصلنا على كتابة فتتحرك العربة عكس اتجاه حركة عقارب الساعة. لنفرض أن X_n يرمز لموضع المركبة بعد إلقاء قطعة العملة عدد n من المرات.



شكل (٢,٥) : الدائرة التي تتحرك فيها المركبة.

١- وضح أن $\{X_n\}$ تكون سلسلة ماركوف؟

٢- أوجد م.ح.ن. P.

٣- احسب P^n.

الحل

حيث إن المتغير العشوائي X_n عبارة عن متغير وصفي يصف موضع المركبة، إذن يمكن إعطاؤه قيماً عددية حتى يمكن التعامل معه كمتغير عددي، فيمكن فرض أن السلسلة تكون في أحد الحالات 0 = {المركبة عند الموضع e_1} أو 1= {المركبة عند الموضع e_2} أو 2= {المركبة عند الموضع e_3}.

١- من تعريف X_n يمكن التحقق من العلاقة التالية:

$$X_{n+1} = \begin{cases} (X_n + 1) \bmod 3, & \text{باحتما ل } \tfrac{1}{2} \\ (X_n - 1) \bmod 3, & \text{باحتمال } \tfrac{1}{2} \end{cases}$$

من الواضح أن قيمة X_{n+1} تعتمد فقط على قيمة X_n ولا تعتمد على X_1 ، X_2 ،...، X_n ، ومن ثَم فإن $\{X_n\}$ تكون سلسلة ماركوف.

٢- يمكن استنتاج م.ح.ن. لهذه السلسلة على الصورة التالية:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

٣- يمكن حساب المصفوفة P^n كالآتي:

نبدأ أولاً بكتابة المصفوفة P على الصورة التالية :

$$P = Q D Q^{-1}$$

حيث إن D عبارة عن مصفوفة قطرية عناصر قطرها الرئيسي مكون من القيم الذاتيـــة للمصفوفة P ، Q عبارة عن مصفوفة يمكن الحصول عليها من المتجهات الذاتية الملازمة للقيم الذاتية للمصفوفة P (كما سنوضح لاحقًا) أما Q^{-1} فهي معكوس المصفوفة Q .

ومن ثَم فإن:

$$P^n = Q D^n Q^{-1}$$

ويمكن التحقق من صحة هذه العلاقة باستخدام الاستنتاج الرياضي، حيث إن:

$$P^2 = Q D Q^{-1} Q D Q^{-1} = Q D I D Q^{-1} = Q D^2 Q^{-1}$$

نود أن نذكر القارئ هنا إلى أنه من السهل إيجاد D^n للمصفوفة القطرية D . فيما يلـــي سنوضح كيفية حساب هذه المصفوفات من خلال الخطوات التالية:

- نحسب القيم الذاتية eigenvalues للمصفوفة P . يمكن الحصول على القيم الذاتية للمصفوفة P بحل المعادلة التالية بالنسبة لـــ λ :

$$\det(P - \lambda I) = 0$$

حيث إن $\det(A)$ يرمز لمحددة المصفوفة A، أما I فيرمز إلى مصفوفة الوحدة.

لدينا:

$$\det(P-\lambda I)=\begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix}$$

إذن:

$$\det(P-\lambda I)=(\lambda-1)\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)^2=0$$

بحل هذه المعادلة بالنسبة لـ λ نحصل على القيم الذاتية التالية:

$\lambda_1=1$ ، $\lambda_2-\frac{1}{2}$ ، $\lambda_3=-\frac{1}{2}$.

- نحسب المتجهات الذاتية eigenvectors للمصفوفة P :

لحساب المتجه الذاتي الملازم للقيمة الذاتية λ_1 ، نتبع الطريقة التالية: نفرض أن المتجه الذاتي هو $v_1=(x,y,z)$ والذي يحقق العلاقة:

$$(P-\lambda I)v_1^T=0$$

أي أن:

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

والتي يمكن كتابتها كالآتي:

$$\begin{aligned} -x + \tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{2}z &= 0 \\ \tfrac{1}{2}x - y + \tfrac{1}{2}z &= 0 \\ \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}y - z &= 0 \end{aligned}$$

والآن نحل هذه المعادلات بالنسبة لـ x,y,z لنحصل على $x=1, y=1, z=1$ ،

ومن ثَم فإن المتجه الذاتي الملازم للقيمة الذاتية λ_1 هو $v_1 = (1,1,1)$. وبالمثل يمكن الحصول على المتجهين الذاتيين الملازمين للقيمتين λ_2 ، λ_3 ليكونا $v_2 = (-1,1,0)$ ، $v_3 = (-1,0,1)$ ، على الترتيب. ومن ثم فإن المصفوفة Q تأخذ الصورة التالية:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

يلاحظ أن أعمدة المصفوفة Q عبارة عن مدور المتجهات الذاتية.

وبحساب معكوس المصفوفة Q نحصل على:

$$Q^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

أما المصفوفة القطرية فتكون عبارة عن المصفوفة القطرية المكون قطرها الرئيسي من القيم الذاتية، بمعنى أن:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

يمكن للقارئ أن يتأكد من أن $P = Q\,D\,Q^{-1}$ تكون متحققة.

- نحسب المصفوفة P^n : حيث إن لدينا:

$$P^n = Q\,D^n\,Q^{-1}$$

إذن:

$$P^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-\frac{1}{2})^n & 0 & 0 \\ 0 & (-\frac{1}{2})^n & 0 \\ 0 & 0 & (-\frac{1}{2})^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2(-\frac{1}{2})^n & (-\frac{1}{2})^{n+1} & (-\frac{1}{2})^{n+1} \\ (-\frac{1}{2})^{n+1} & 2(-\frac{1}{2})^n & (-\frac{1}{2})^{n+1} \\ (-\frac{1}{2})^{n+1} & (-\frac{1}{2})^{n+1} & 2(-\frac{1}{2})^n \end{pmatrix}$$

- المسلك التقاربي asymptotic behavior للمصفوفة P^n. عند الحاجة إلى حساب المسلك التقاربي لسلسلة ماركوف أي حساب $\lim_{n\to\infty} P^n$ ،فإنه يمكن بسهولة الحصول عليه، باستخدام التقريب الموضح سابقاً، على الصورة الآتية:

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(٢,٤) احتمال المسار

Probability of a Path

نبدأ هذا البند بعرض بعض النتائج المفيدة في حساب احتمال المسار. لدينا:

$$\frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)} = P(A \mid B \cap C) = P(A \mid B, C)$$

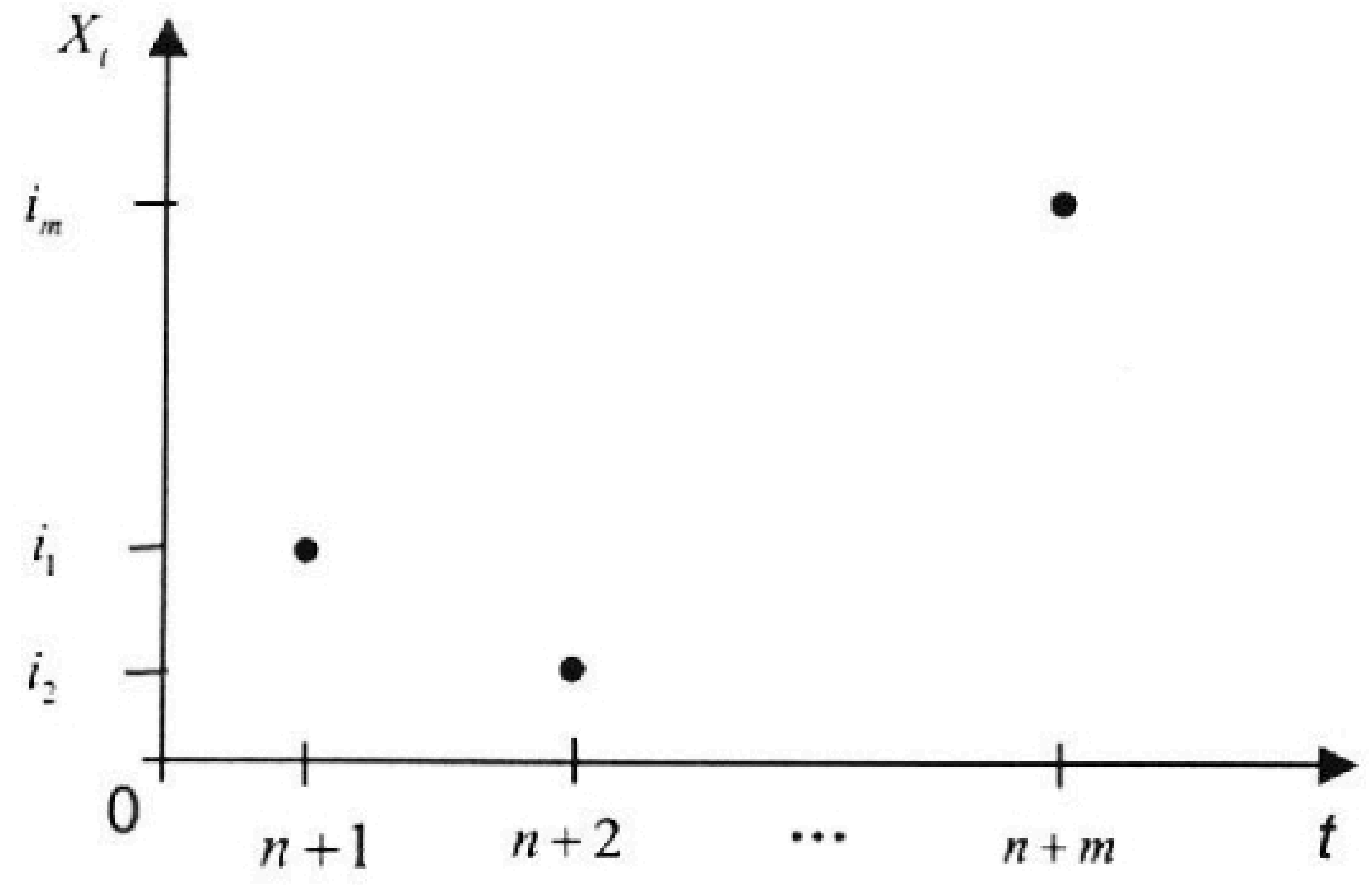
أيضًا من المعلوم أن:

$$\begin{aligned} P(A \cap B \cap C) &= P(A \cap B \mid C)\, P(C) \\ &= P(A \mid B, C)\, P(B \cap C) \\ &= P(A \mid B, C)\, P(B \mid C)\, P(C) \end{aligned}$$

ومن ثَم فإن:

$$P(A \cap B \mid C) = P(A \mid B, C)\, P(B \mid C) \qquad (٢,٥)$$

والآن لتكن $\{X_n\}$ سلسلة متجانسة لماركوف بفضاء حالة منتهٍ وليكن عدد عناصره m، والمطلوب هو حساب احتمال أن السلسلة تزور الحالات i_1، i_2، ...، i_m عند الأزمنة المتتالية $n+1$، $n+2$، ...، $n+m$ بشرط أنها بدأت من الحالة i_0. تسمى الحالات المتتابعة والتي يمكن أن تزورها (تنتقل إليها) العملية العشوائية بمسار (path) العملية العشوائية. يوضح الشكل (٢,٥) رسمًا بيانيًا يوضح مسار السلسلة $\{X_n\}$. وباستخدام خاصية ماركوف يمكن الحصول على أن احتمال المسار للعملية العشوائية يكون عبارة عن حاصل ضرب احتمالات الانتقال بخطوة، كما توضحه النظرية التالية:



شكل (٢,٥): مسار السلسلة $\{X_n\}$.

نظرية (٢,٣)

لأي أعداد صحيحة غير سالبة $n = 0,1,2,\ldots$ ، $m = 1,2,\ldots$ ولأي مسار i_0 ، i_1 ، ...، i_m لسلسلة ماركوف (حيث $i_0, i_1, \ldots, i_m \in S$) يكون:

$$P(X_{n+1} = i_1, \ldots, X_{n+m} = i_m \mid X_n = i_0) = p_{i_0 i_1}\, p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{m-1} i_m}$$

البرهان

يترك كتمرين. [مساعدة: استخدم الصيغة (٢,٥)]

مثال (٢,٣٤)

لتكن $\{X_n\}$ سلسلة ماركوف بفضاء الحالة $S = \{a,b,c\}$ و م.ح.ن. :

$$P = \begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline a & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ b & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ c & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & 0 \end{array}$$

احسب ما يلي:

١- احتمال المسار b,c,a,c,a,c,b بشرط أنها بدأت من الحالة c.

٢- احتمال الانتقال من الحالة c إلى الحالة c في خطوتين.

الحل

١- يمكن استخدام نظرية (٢,٣) لحساب احتمال المسار كالآتي:

$$\begin{aligned} P(X_1 = b, X_2 = c, X_3 = a, X_4 = c, X_5 = a, X_6 = c, X_7 = b \mid X_0 = c) &= p_{cb}\, p_{bc}\, p_{ca}\, p_{ac}\, p_{ca}\, p_{ac}\, p_{cb} \\ &= \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{5} \\ &= \frac{3}{2500} \end{aligned}$$

٢- مصفوفة احتمال الانتقال بخطوتين تعطى بـــ:

$$P^{(2)} = P^2 = \begin{pmatrix} \frac{17}{30} & \frac{9}{40} & \frac{5}{24} \\ \frac{8}{15} & \frac{3}{10} & \frac{1}{6} \\ \frac{17}{30} & \frac{3}{20} & \frac{17}{60} \end{pmatrix}$$

ومن ثم فإن:

$$P(X_{n+2} = c \mid X_n = b) = p_{bc}^{(2)} = \frac{1}{6}$$

(٢,٥) الاحتمالات الهامشية

Marginal Probabilities

بناء على ما تقدم يتضح أن أيًّا من احتمالات الانتقال (بخطوة) بعد خطوة و احتمال الانتقال بعد n من الخطوات (بـــ n من الخطوات) يكون عبارة عن احتمال شرطي. فمثلاً،

الاحتمالي التالي:

$$p_{ij}^{(n)} = P(X_n = j \mid X_0 = i)$$

يكون عبارة عن احتمال شرطي. سنقدم فيما يلي كيفية الحصول على توزيع الاحتمال الهامشي (marginal probability) لسلسلة ماركوف ذات عدد محدود من الحالات وليكن m. وللحصول على الاحتمالات الهامشية سنحتاج إلى الاحتمالات الابتدائية (initial probabilities) لسلسلة ماركوف.

تعريف (٢,٣): (**الاحتمالات الابتدائية** Initial probabilities)

يسمى المتجه $p^{(0)} = \left(p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, \cdots, p_m^{(0)}\right)$ بمتجه **الاحتمالات الابتدائية** (أو التوزيع الابتدائي initial distribution) لسلسلة ماركوف $\{X_n : n = 0,1,2,\cdots\}$ ذات فضاء الحالة $S = \{1,2,\cdots,m\}$ ، حيث $p_j^{(0)} = P(X_0 = j), j \in S$ ، إذا تحققت الشروط التالية:

١- $p_j^{(0)} \geq 0 \ \forall j \in S$ ،

٢- $\sum_{j \in S} p_j^{(0)} = 1$.

ملاحظة (٢,٢)

الاحتمال $p_j^{(0)} = P(X_0 = j), j \in S$ يعنى احتمال أن العملية العشوائية ستبدأ من الحالة $j \in S$ باحتمال $p_j^{(0)}$. ومن ثم يمكن الفهم بأن الاحتمالات الابتدائية $p^{(0)}$ تعطي التوزيع الاحتمالي لسلسلة ماركوف في البداية أي قبل أول انتقال، أحيانًا نرمز للاحتمال الابتدائي (متجه الاحتمال الابتدائي) بالرمز $\pi(j)$ (π) بدلاً من $p_j^{(0)}$ ($p^{(0)}$). فمثلاً: إذا بدأت العملية العشوائية من الحالة $1 \in S$ ، فإن $p^{(0)} = (1,0,0,\cdots,0)$ ، أما إذا بدأت العملية العشوائية من الحالة $3 \in S$ ، فإن $p^{(0)} = (0,0,1,0,\cdots,0)$ ، وهكذا.

من المفيد أحيانًا حساب احتمال وجود العملية العشوائية في الحالة $j \in S$ بعد عدد n من الانتقالات، يرمز لهذا الاحتمال بالرمز $p_j^{(n)}$ ويعرف بالعلاقة التالية:

$$p_j^{(n)} = P(X_n = j), \ \ j \in S$$

يسمى هذا الاحتمال **بالاحتمال الهامشي** marginal probability لسلسلة ماركوف بعد n من الخطوات. تعطينا النظرية التالية قانونًا لحساب الاحتمالات الهامشية لسلاسل ماركوف.

نظرية (٢,٤)

إذا كان $p^{(0)} = \left(p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, \cdots, p_m^{(0)}\right)$ التوزيع الاحتمالي الابتدائي لسلسلة ماركوف بعدد حالات m، م.ح.ن. P. إذن التوزيع الاحتمالي لحالة العملية بعد عدد n من الانتقالات، والذي سنرمز له بـ $p^{(n)} = \left(p_1^{(n)}, p_2^{(n)}, \cdots, p_m^{(n)}\right)$، يكون:

$$p^{(n)} = p^{(0)}\, P^{(n)} \qquad (٢,٦)$$

البرهان

حيث إنه لأي $j = 1, 2, \ldots, m$ يكون لدينا:

$$p_j^{(n)} = P(X_n = j)$$

لكي تنتقل السلسلة إلى الحالة $j \in \{1,2,\cdots,m\}$ بعد عدد n من الانتقالات يجب أن تبدأ من أحد الحالات $i \in \{1,2,\cdots,m\}$. ومن ثَم، وباستخدام قانون الاحتمال الكلي، فإن:

$$p_j^{(n)} = \sum_{i=1}^{m} P(X_n = j, X_0 = i)$$

ومن خواص الاحتمال الشرطي نحصل على:

$$p_j^{(n)} = \sum_{i=1}^{m} P(X_n = j \mid X_0 = i) P(X_0 = i)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} p_i^{(0)} p_{ij}^{(n)}$$

ومن ثَم فإن:

$$\left(p_1^{(n)}, p_2^{(n)}, \cdots, p_m^{(n)}\right) = \left(p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, \cdots, p_m^{(0)}\right) \begin{pmatrix} p_{11}^{(n)} & p_{12}^{(n)} & \cdots & p_{1m}^{(n)} \\ p_{21}^{(n)} & p_{22}^{(n)} & \cdots & p_{2m}^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{m1}^{(n)} & p_{m2}^{(n)} & \cdots & p_{mm}^{(n)} \end{pmatrix}$$

أو بشكل مكافئ:

$$p^{(n)} = p^{(0)} P^{(n)}$$

مثال (٢,٣٥)

بالعودة إلى المثالين (٢,٢) ، (٢,٩) حيث كانت م.ح.ن. تأخذ الصورة التالية:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

إذا بدأنا بثلاث صور، فأوجد احتمال أن:

١- يوجد أربع صور بعد محاولة واحدة.

٢- يوجد صورة واحدة بعد محاولتين.

٣- يوجد ثلاث صور بعد محاولتين.

الحل

حيث إنه في البداية كان لدينا 3 صور، أي أنه عندما $n = 0$ كان $X_0 = 3$ ، فإن التوزيع الابتدائي يكون $p^{(0)} = (0,0,0,1,0)$. إذن:

١- التوزيع الاحتمالي بعد محاولة (خطوة) واحدة يكون:

$$\begin{aligned} p^{(1)} &= p^{(0)} P \\ &= (0,0,0,1,0) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \left(0,0,\frac{3}{4},0,\frac{1}{4}\right) \end{aligned}$$

ومن ثَم نحصل على $p_4^{(1)} = P(X_1 = 4) = \dfrac{1}{4}$.

لاحظ أن هذا الاحتمال يمكن الحصول عليه بضرب متجه التوزيع الاحتمالي الابتدائي في العمود الذي يناظر الحالة $j = 4$ في مصفوفة احتمال الانتقال P (العمود الأخـــير)، أي أن:

$$p_4^{(1)} = P(X_1 = 4) = (0,0,0,1,0)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}$$

بالمثل لو كان المطلوب هو احتمال وجود العملية العشوائية في الحالة $j = 2$ بعد خطوة واحدة، أي قيمة $P(X_1 = 2)$ ، فإنه يمكن الحصول على هذا الاحتمال بضرب متجـــه التوزيع الاحتمالي الابتدائي في العمود الذي يناظر الحالة $j = 2$ في مـــصفوفة احتمـــال الانتقال P (العمود الثالث)، أي أن:

$$p_2^{(1)} = P(X_1 = 2) = (0,0,0,1,0)\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{4} \\ 0 \\ \frac{3}{4} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{4}$$

٢- للحصول على التوزيع الاحتمالي بعد خطوتين، نحتاج إلى حساب مصفوفة احتمـــالات الانتقال بعد خطوتين $P^{(2)}$:

$$P^{(2)} = P \cdot P = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{8} & 0 & \frac{3}{8} & 0 \\ \frac{1}{8} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{3}{8} & 0 & \frac{5}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

ومن ثَم فإن:

$$p_1^{(2)} = P(X_2 = 1) = (0,0,0,1,0)\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{5}{8} \\ 0 \\ \frac{3}{8} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{8}$$

٣- بالمثل يمكن حساب احتمال الحصول على ثلاث صور بعد محاولتين:

$$p_3^{(2)} = P(X_2 = 3) = (0,0,0,1,0)\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{8} \\ 0 \\ \frac{5}{8} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{5}{8}$$

مثال (٢,٣٦)

لنفرض أن لدينا سلسلة ماركوف بفضاء الحالة $S = \{1,2\}$ و م.ح.ن. على الصورة التالية:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

أوجد احتمال وجود العملية العشوائية في الحالة 2 بعد عدد n من الانتقالات إذا كانت:

١- العملية بدأت من الحالة 1.

٢- العملية لها نفس فرصة البداية من أي من الحالتين 1 أو 2.

الحل

يمكن التحقق من أن:

$$P^{(n)} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 9+8\left(-\frac{5}{12}\right)^n & 8-8\left(-\frac{5}{12}\right)^n \\ 9-9\left(-\frac{5}{12}\right)^n & 8+9\left(-\frac{5}{12}\right)^n \end{pmatrix}$$

١- حيث إن العملية ستبدأ من الحالة 1، إذن $P(X_0=1)=p_1^{(0)}=1$، $P(X_0=2)=p_2^{(0)}=0$ ومن ثَم فإن $p^{(0)}=(1,0)$. والمطلوب الآن هو حساب $p_2^{(n)}=P(X_n=2)$. يمكن الحصول على التوزيع الاحتمالي لحالة العملية بعد عدد n من الخطوات، $p^{(n)}=\left(p_1^{(n)},p_2^{(n)}\right)$، باستخدام العلاقة :

$$\begin{aligned} p^{(n)} &= p^{(0)}\,P^{(n)} \\ &= (1,0)\,\frac{1}{17}\begin{pmatrix} 9+8\left(-\frac{5}{12}\right)^n & 8-8\left(-\frac{5}{12}\right)^n \\ 9-9\left(-\frac{5}{12}\right)^n & 8+9\left(-\frac{5}{12}\right)^n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{17}\left(9+8\left(-\frac{5}{12}\right)^n \quad 8-8\left(-\frac{5}{12}\right)^n\right) \end{aligned}$$

ومن ثَم فإن:

$$p_2^{(n)}=P(X_n=2)=\frac{1}{17}\left[8-8\left(-\frac{5}{12}\right)^n\right]$$

٢- حيث إن العملية ستبدأ من أي حالة باحتمالات متساوية، إذن $P(X_0=2)=P(X_0=1)$ ومن ثَم فإن $p_1^{(0)}=p_2^{(0)}=\frac{1}{2}$، ومن ثم فإن التوزيع الاحتمالي الابتدائي للعملية يصبح $p^{(0)}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. ومن ثم يمكن الحصول على $p^{(n)}=\left(p_1^{(n)},p_2^{(n)}\right)$ كالتالي:

$$\begin{aligned} p^{(n)} &= \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\frac{1}{17}\begin{pmatrix} 9+8\left(-\frac{5}{12}\right)^n & 8-8\left(-\frac{5}{12}\right)^n \\ 9-9\left(-\frac{5}{12}\right)^n & 8+9\left(-\frac{5}{12}\right)^n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{17}\left(9-\frac{1}{2}\left(-\frac{5}{12}\right)^n \quad 8+\frac{1}{2}\left(-\frac{5}{12}\right)^n\right) \end{aligned}$$

ومن ثَم فإن:

$$p_2^{(n)}=P(X_n=2)=\frac{1}{17}\left[8+\frac{1}{2}\left(-\frac{5}{12}\right)^n\right]$$

مثال (٢,٣٧)

استخدمنا في المثال (٢,٦) نموذج سلسلة ماركوف بحالتين لسقوط المطر على مدينة معينة. إذا كانت الحالة 1 ترمز إلى أن الجو ماطر ، أما الحالة 2 فترمز إلى أن الجو جاف. إذن يمكن كتابة م.ح.ن. على الصورة التالية:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ P = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} \end{array}$$

إذا علمنا أن احتمال جفاف الجو في الأول من يونيو يساوي $3/8$، أوجد احتمال أن:

١- الجو سيكون جافًا في الثاني من يونيو.

٢- الجو سيكون جافًا في الثالث من يونيو.

٣- الجو سيكون ماطرًا في الخامس من يونيو.

الحل

حيث إننا نعلم أن الجو كان جافًا في الأول من يونيو باحتمال $3/8$، إذن $P(X_0 = 2) = p_2^{(0)} = 3/8$ ، $P(X_0 = 1) = p_1^{(0)} = 5/8$ ومن ثَم فإن التوزيع الاحتمالي الابتدائي للعملية يكون $p^{(0)} = \left(\frac{5}{8}, \frac{3}{8}\right)$.

١- المطلوب هو حساب احتمال أن العملية العشوائية ستكون في الحالة 2 بعد خطوة واحدة، أي نريد حساب $p_2^{(1)} = P(X_1 = 2)$. يمكن الحصول على هذا الاحتمال كالآتي:

$$p_2^{(1)} = \left(\frac{5}{8}, \frac{3}{8}\right)\begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.6 \end{pmatrix} = 0.35$$

وهذا يعني أن الجو سيكون جافًا في الثاني من يوليو باحتمال 0.35 .

٢- نريد الآن حساب $p_2^{(2)} = P(X_2 = 2)$. يمكن الحصول على هذا الاحتمال كالآتي:

أولاً نوجد $P^{(2)}$:

$$P^{(2)} = P \cdot P = \begin{pmatrix} 0.72 & 0.28 \\ 0.56 & 0.44 \end{pmatrix}$$

ومن ثَم فإن:

$$p_2^{(2)} = \left(\frac{5}{8}, \frac{3}{8}\right)\begin{pmatrix} 0.28 \\ 0.44 \end{pmatrix} = 0.34$$

وهذا يعني أن الجو سيكون جافًا في الثالث من يوليو باحتمال 0.34.

٣- المطلوب حساب $p_1^{(4)} = P(X_4 = 1)$. يمكن الحصول هذا الاحتمال كالآتي:

أولاً نوجد $P^{(4)}$:

$$P^{(4)} = P^{(2)} \cdot P^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.68 & 0.32 \\ 0.65 & 0.35 \end{pmatrix}$$

ومن ثَم نحصل على $p_1^{(4)}$ على الصورة:

$$p_1^{(4)} = \left(\frac{5}{8}, \frac{3}{8}\right)\begin{pmatrix} 0.68 \\ 0.65 \end{pmatrix} = 0.67$$

وهذا يعني أن الجو سيكون ماطرًا في الخامس من يوليو باحتمال 0.67.

تمرين (٢,٤)

في المثال السابق أوجد احتمال أن الجو سيكون ماطرًا في الثلاثين من يوليو (أي أوجد $p_1^{(29)} = P(X_{29} = 1)$).

مثال (٢,٣٨)

لنفرض أن $\{X_n\}$ عبارة عن سلسلة ماركوف بفضاء الحالة $S = \{1,2\}$ وأن التوزيع الاحتمالي الابتدائي لها هو $p^{(0)} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ وأن مصفوفة احتمالات انتقالها هي:

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$$

احسب الاحتمالات التالية:

١- $P(X_1 = 2, X_4 = 1, X_6 = 1, X_{18} = 1 \mid X_0 = 1)$.

٢- $P(X_2=1, X_7=2, X_9=2 \mid X_0=1)$.

٣- $P(X_2=1, X_7=2)$.

الحل

يمكن الحصول على ما يلي:

$$P^2=\begin{pmatrix}0.40 & 0.60\\ 0.36 & 0.64\end{pmatrix},\ P^3=\begin{pmatrix}0.380 & 0.620\\ 0.372 & 0.628\end{pmatrix},\ P^4=\begin{pmatrix}0.3760 & 0.6240\\ 0.3744 & 0.6256\end{pmatrix}$$

وعمومًا باستخدام الطريقة الموضحة في مثال (٢,٣١) يمكن أن نحصل على P^n على الصورة:

$$P^n=\begin{pmatrix}\frac{3}{8}+\frac{5}{8}(0.2)^n & \frac{5}{8}-\frac{5}{8}(0.2)^n\\ \frac{3}{8}-\frac{3}{8}(0.2)^n & \frac{5}{8}+\frac{3}{8}(0.2)^n\end{pmatrix}$$

ومن ثم يكون لدينا:

١-

$$\begin{aligned}P(X_1=2, X_4=1, X_6=1, X_{18}=1 \mid X_0=1) &= p_{12}\, p_{21}^{(3)}\, p_{11}^{(2)}\, p_{11}^{(12)}\\ &=(0.5)(0.372)(0.40)\left(\frac{3}{8}+\frac{5}{8}(0.2)^{12}\right);\end{aligned}$$

٢- وأيضاً:

$$\begin{aligned}P(X_2=1, X_7=2, X_9=2 \mid X_0=1) &= p_{11}^{(2)}\, p_{12}^{(5)}\, p_{22}^{(2)}\\ &=(0.4)\left(\frac{5}{8}-\frac{5}{8}(0.2)^5\right)(0.64);\end{aligned}$$

٣- باستخدام قانون الاحتمال الكلي يمكن أن نحصل على:

لنفرض أن $A=\{X_2=1, X_7=2\}$ وحيث إن العملية إما أن تبدأ من الحالة 1 أو من الحالة 2، إذن $H_1=\{X_0=1\}$ و $H_2=\{X_0=2\}$ يكون تجزيئاً لفضاء التجربة العشوائية الممثلة لبداية السلسلة. إذن يمكن كتابة الحادثة A كاتحاد حادثتين متنافيتين $A\cap H_1$ ، $A\cap H_2$:

$$A=(A\cap H_1)\cup(A\cap H_2)$$

ومن ثَم فإن:

$$P(A)=P(A\cap H_1)+P(A\cap H_2)$$

وباستخدام العلاقة $P(A\cap H_i)=P(A\mid H_i)P(H_i), i=1,2$ نحصل على:

$$P(A)=P(A\mid H_1)P(H_1)+P(A\mid H_2)P(H_2)$$

وحيث إن $A=A_1\cap A_2$ و $A_2=\{X_2=1\}$ و $A_1=\{X_7=2\}$ ، إذن:

$$P(A)=P(A_1,A_2\mid H_1)P(H_1)+P(A_1,A_2\mid H_2)P(H_2)$$

وباستخدام العلاقة:

$$P(A_1,A_2\mid H_i)=P(A_1\mid A_2,H_i)P(A_2\mid H_i),\ i=1,2$$

نحصل على:

$$\begin{aligned}P(A)&=P(A_1\mid A_2,H_1)P(A_2\mid H_1)P(H_1)\\&\quad+P(A_1\mid A_2,H_2)P(A_2\mid H_2)\,P(H_2)\end{aligned}$$

أي أن:

$$\begin{aligned}P(A)&=P(X_7=2\mid X_2=1,X_0=1)P(X_2=1\mid X_0=1)P(X_0=1)\\&\quad+P(X_7=2\mid X_2=1,X_0=2)P(X_2=1\mid X_0=2)P(X_0=2)\end{aligned}$$

ومن خاصية ماركوف:

$$P(X_7=2\mid X_2=1,X_0=i)=P(X_7=2\mid X_2=1),\ i=1,2$$

إذن:

$$\begin{aligned}P(A)&=P(X_7=2\mid X_2=1)P(X_2=1\mid X_0=1)P(X_0=1)\\&\quad+P(X_7=2\mid X_2=1)P(X_2=1\mid X_0=2)P(X_0=2)\end{aligned}$$

ومن ثَم فإن:

$$\begin{aligned}P(X_2=1,X_7=2)&=p_{12}^{(5)}p_{11}^{(2)}\ p_1^{(0)}+p_{12}^{(5)}p_{21}^{(2)}\ p_2^{(0)}\\&=\frac{1}{3}\ (0.4)\left(\frac{5}{8}-\frac{5}{8}(0.2)^5\right)+\frac{2}{3}\ (0.36)\left(\frac{5}{8}-\frac{5}{8}(0.2)^5\right)\end{aligned}$$

نتيجة (٢,١)

ليكن $p_i^{(0)}=P(X_0=i)$ ، هو التوزيع الاحتمالي الابتدائي للعملية العشوائية $\{X_n\}$ بفضاء الحالة S. إذن لأي عدد صحيح $m=0,1,2,\cdots$ و $i_0,i_1,\cdots,i_m\in S$ فإن:

$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \cdots, X_m = i_m) = p_{i_0}^{(0)}\, p_{i_0 i_1}\, p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{m-1} i_m}$$

البرهان

لنفرض أن $A = A_0 \cap A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m$ حيث إنه لأجل $j = 0,1,\cdots,m$ فإن $A_j = \{X_j = i_j\}$ ، ،إذن المطلوب هو إيجاد $P(A)$. باستخدام قانون الاحتمال الشرطي نحصل على:

$$\begin{aligned}
P(A) &= P(A_0)P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m \mid A_0) \\
&= P(A_0)P(A_1 \mid A_0)P(A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_m \mid A_1 \cap A_0) \\
&= P(A_0)P(A_1 \mid A_0)P(A_2 \mid A_1 \cap A_0)P(A_3 \cap \cdots \cap A_m \mid A_2 \cap A_1 \cap A_0) \\
&= P(A_0)P(A_1 \mid A_0)P(A_2 \mid A_1 \cap A_0)\cdots P(A_m \mid A_{m-1} \cap \cdots \cap A_1 \cap A_0)
\end{aligned}$$

ولكن من خاصية ماركوف فإن:

$$P(A_k \mid A_{k-1} \cap \cdots \cap A_1 \cap A_0) = P(A_k \mid A_{k-1}),\ k = 1,2,\cdots,m$$

إذن:

$$P(A) = P(A_0)P(A_1 \mid A_0)P(A_2 \mid A_1)\cdots P(A_m \mid A_{m-1})$$

ولكن $P(A_k \mid A_{k-1}) = p_{k-1\,k},\ k = 1,2,\cdots,m$ ، $P(A_0) = p_{i_0}^{(0)}$ إذن:

$$P(A) = p_{i_0}^{(0)}\, p_{i_0 i_1}\, p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{m-1} i_m}$$

وهذا يُكمل البرهان.

توضح النتيجة السابقة أنه إذا علم كل من التوزيع الاحتمالي الابتدائي $p^{(0)}$ ومصفوفة احتمالات الانتقال P فإنه يمكن تحديد التوزيع الاحتمالي المشترك للمتغيرات العشوائية X_0 ، X_1 ، ... ، X_m تحديداً تاماً.

مثال (٢,٣٩)

في المثالين (٢,١) و (٢,٥) وباستخدام النتيجة (٢,١) يمكن الحصول على توزيع الاحتمال المشترك التالي:

$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \cdots, X_n = i_n) = p_{i_0}^{(0)}\, p_{i_0 i_1}\, p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1} i_n}$$

ولكن $p_{i_j i_{j+1}} = P\left(X_n = i_{j+1} \mid X_{n-1} = i_j\right) = 1 - p$ إذن نحصل على سبيل المثال على:

$$P\left(X_0 = 0, X_1 = 1, \cdots, X_m = 1\right) = p_0^{(0)} \left(1 - p\right) p^{m-1}$$

مثال (٢,٤٠)

لنعد إلى المثال (٢,١١)، إذا بدأنا عندما كان الصندوق A يحتوي على كرتين بيضاوين إذن احتمال أنه سيحتوي على كرة واحدة بيضاء بعد 3 خطوات هو:

$$p_1^{(3)} = p_0^{(0)}\, p_{01}^{(3)} + p_1^{(0)}\, p_{11}^{(3)} + p_2^{(0)}\, p_{21}^{(3)} = 1$$

إذا بدأنا عندما كان الصندوق A يحتوي على كرة واحدة بيضاء إذن $p_1^{(0)} = 1$ بينما $p_j^{(0)} = 0$ لقيم $j \neq 1$.

سنوضح في المثال التالي كيفية تطبيق العلاقة (٢,٥) في التنبؤ حول التوزيع الاحتمالي المستقبلي لحالات العملية العشوائية.

مثال (٢,٤١): خطة العناية بالأسنان Planning for dental care.

لتقييم برنامج العناية بالأسنان قام أحد المهتمين بتحليل سجل 578 مريضاً، وكانت الحالات معرفة كالآتي:

١- E الإحساس بالآلام وعدم الارتياح.

٢- I الفحص والمعالجة الكاملة.

٣- M خدمة الصيانة والمعالجة.

٤- N عدم الزيارة.

وبمتابعة فريق البحث لحالات المرضى خلال ثلاثة أعوام حصلوا على مصفوفة احتمالات الانتقال بعد عام واحد على الصورة التالية:

$$P = \begin{array}{c} \\ M \\ I \\ E \\ N \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} M & I & E & N \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.346 & 0.014 & 0.003 & 0.637 \\ 0.372 & 0.110 & 0.010 & 0.508 \\ 0.190 & 0.152 & 0.095 & 0.562 \\ 0.003 & 0.053 & 0.012 & 0.933 \end{pmatrix} \end{array}$$

لنفرض أنه في البداية كان هناك نسبة 14.5% من المرضى في الحالة E و نسبة 85.5% منهم في الحالة I ، وهذا يعني أن الاحتمال الابتدائي هو $p^{(0)} = (0,0.855,0.145,0)$ ، على القارئ التحقق من البيانات المعطاة في الجدول (٢,٣) وذلك باستخدام العلاقة (٢,٦) . يمكن التوضيح بأنه من المتوقع نسبة $22.7\%=\%(16.8+4.8+1.1)$ فقط من المرضى سيتلقون العلاج (في الحالات M أو I أو E) بعد عامين. أما بعد خمسة أعوام يتوقع نسبة 10.9% فقط من المرضى سيتلقون نوعًا معينًا من العلاج.

جدول (٢,٢): الاحتمالات الهامشية لمثال (٢,٤١).

	النسب المتوقعة عند نهاية العام				
	العام−1	العام−2	العام−3	العام−4	العام−5
M	34.5	16.8	8.0	5.1	4.2
I	11.6	4.8	5.0	5.4	5.5
E	2.3	1.1	1.1	1.2	1.2
N	51.6	77.3	85.8	88.3	89.0

(٢,٦) تمارين

(٢,١) (المصفوفات العشوائية)

١- لتكن $M^{(1)}$ ، $M^{(2)}$ مصفوفتين عشوائيتين منتهيتين من نفس البعد. وضح أن حاصل ضربهما $M = M^{(1)} M^{(2)}$ يكون أيضًا مصفوفة عشوائية.

٢- ليكن $\{M^{(n)} : n = 0,1,2,\cdots\}$ متتابعة من المصفوفات العشوائية والتي تتقارب بانتظام إلى المصفوفة M . وضح أن M تكون مصفوفة عشوائية.

٣- لتكن M مصفوفة عشوائية :

(أ) وضح أن الواحد هو أحد القيم الذاتية لـ M .

(ب) وضح أنه إذا كان r قيمة ذاتية أخرى لـ M فإن $r < 1$.

(٢,٢) ليكن M مصفوفة عشوائية. وضح أنها تحقق الخواص التالية:

١- لأي $n = 1, 2, \ldots$ فإن M^n تكون أيضًا مصفوفة عشوائية.

٢- إذا كانت جميع صفوف M متطابقة إذن $M^n = M$ لكل $n = 1, 2, \ldots$.

٣- إذا كانت M تأخذ الصورة التالية:

$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

حيث إن كلاً من A ، B ، 0 مصفوفات مربعة، إذن العملية التي تبدأ من A لا يمكن أبدًا أن تنتقل إلى أي حالة من حالات B وكذلك العكس. تسمى سلسلة ماركوف في هذه الحالة بالمختزلة. لاحظ أن:

$$M^n = \begin{pmatrix} A^n & 0 \\ 0 & B^n \end{pmatrix}$$

٤- إذا كانت M على الصورة:

$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix}$$

حيث إن كلاً من A ، B ، C ، 0 مصفوفات مربعة إذن:

(أ) احتمال وجود العملية في واحدة من حالات B يتناقص مع زيادة عدد الانتقالات n.

(ب) الانتقال من حالة في A إلى حالة في B يكون ممكنًا ولكن العكس غير صحيح بمعنى أنه لا يوجد انتقال من حالات في B إلى حالات في A. حالات A تسمى بحالات مرتدة (recurrent) أما حالات B فتسمى بحالات عابرة (انتقالية transient). وضح أن:

$$M^n = \begin{pmatrix} A^n & 0 \\ S_n & B^n \end{pmatrix}$$

حيث إن $S_n = S_{n-1}A + B^{n-1}C$ وأن $S_1 = C$.

٥- إذا كانت M على الصورة:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & D \\ C & 0 \end{pmatrix}$$

أثبت أن لأي عدد زوجي n يكون:

$$M^n = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

ولأي عدد فردي n يكون:

$$M^n = \begin{pmatrix} 0 & D \\ C & 0 \end{pmatrix}$$

وعمومًا:

$$M^{2n} = \begin{pmatrix} (DC)^n & 0 \\ 0 & (DC)^n \end{pmatrix} \text{ ، } M^{2n+1} = \begin{pmatrix} 0 & (CD)^n D \\ (CD)^n C & 0 \end{pmatrix}$$

يمكن القول بأن العملية تتأرجح بين مجموعتين جزئيتين من الحالات. تسمى السلسلة في هذه الحالة بالدورية (periodic).

(٢,٣) خلال دراسة سقوط المطر على منطقة معينة أخذت البيانات التالية من 2437 يوماً:

	جاف	ماطر
جاف	1049	350
ماطر	351	687

بفرض أن X_n يرمز إلى حالة الطقس في اليوم n :

١- وضح أن $\{X_n\}$ سلسلة ماركوف.

٢- قدر مصفوف احتمال الانتقال P لـــ $\{X_n\}$.

٣- احسب P^5 ، P^{10} ، P^n لقيم كبيرة لـــ n.

(٢,٤) وضعت مُعَدَّة تحت المراقبة في اليوم الأول من كل شهر، وسجل خلال عامين متتاليين حالتها من حيث إنها عاملة (1) أو عاطة (0) ، فكانت النتائج التالية:

$$1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1$$
$$1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1$$
$$1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1$$

لنفرض أن X_n يرمز إلى حالة المُعَدَّة في اليوم الأول من الشهر n ، قدِّر م.ح.ن. للسلسلة $\{X_n\}$.

(٢,٥) تم مشاهدة حالات الطقس عند مرصد جوي معين خلال 100 يوم، وقام الراصد بتسجيل حالات الجو وبفرض أن الحالة 1 تعني أن الجو صحو أما الحالة 2 تعني أن الجو غائم وأما الحالة 3 فتعني أن الجو ماطر فقد كانت البيانات المسجلة كالآتي:

$$1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 2, 1, 1, 1, 1, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 1,$$
$$1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 2, 1, 1, 1, 1, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 1,$$
$$1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 2, 3, 3, 2, 3, 3, 3, 2, 2,$$
$$2, 2, 1, 3, 1, 1, 1, 1, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2,$$
$$3, 3, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 1, 1, 2, 3, 2, 1, 1, 1, 1, 2$$

إذا كان X_n يرمز إلى حالة الطقس في اليوم n ، قدر احتمالات الانتقال ومصفوفة احتمال انتقال سلسلة ماركوف $\{X_n\}$.

(٢,٦) ليكن لدينا تجمع من الوحدات من عملية إنتاج حيث إن كل وحدة تصنف على أنها إما جيدة وإما معيبة. لنفرض أن الوحدة الجيدة يتبعها وحدة أخرى جيدة باحتمال α وأن الوحدة المعيبة يتبعها وحدة أخرى معيبة باحتمال β .

١- إذا كانت الوحدة الأولى جيدة فما هو احتمال أن تكون الوحدة الخامسة هي أول وحدة معيبة ناتجة من عملية الإنتاج.

٢- ما هو احتمال أن تكون الوحدة الرابعة معيبة بشرط أن الوحدة الأولى معيبة؟

(٢,٧) يمكن للإلكترون أن ينتقل بين مسارات عديدة قابلة للعد. احتمال انتقال الإلكترون من المسار i إلى المسار j هو $c_i e^{-\alpha|i-j|}$ حيث $\alpha > 0$. بفرض أن X_n يرمز إلى رقم المسار عند اللحظة n. وضح أن $\{X_n\}$ سلسلة متجانسة لماركوف، ثم احسب

مصفوفة احتمال انتقالها وقيمة $c_i, i = 1,2,\ldots$.

(٢,٨) عمّم المثال (٢,٢٤) بفرض أن كل سيارة يمكن أن تأخذ راكباً واحداً باحتمال p أو راكبين باحتمال q أو تترك المحطة بدون أن تأخذ أي راكب باحتمال r. في حالة وجود فردين فقط فإن التاكسي سيأخذ راكباً واحداً باحتمال w ويترك المحطة بدون انتظار باحتمال $1-w$.

(٢,٩) ليكن X_n يرمز إلى رصيد مضارب في أحد البورصات بعد نهاية مضاربته رقم n، حيث إن خطته في المضاربة كالتالي: إذا كان رصيده 4 ريالات أو أكثر فإنه سيضارب بمبلغ ريالين والذي يمكن أن يربحه 4 ريالات باحتمال 0.25، أو يربح 3 ريالات باحتمال 0.3، أو لا يربح شيئاً باحتمال 0.45، أما إذا كان رصيده ريال واحد أو ريالين أو ثلاثة ريالات فسيضارب بمبلغ ريال واحد، والذي يمكن أن يكسبه ريالان باحتمال 0.45، أو لا يكسب شيئاً باحتمال 0.55، ويتوقف عن المضاربة عندما يصبح رصيده صفراً.

١- ليكن Y_{n+1} صافي المكسب عند الجولة رقم $n+1$، أي أن $X_{n+1} = X_n + Y_{n+1}$. احسب:

$$P(Y_{n+1} = k \mid X_n = i), \quad i = 0,1,\ldots; k = -2,-1,0,1,\ldots$$

٢- وضح أن $\{X_n ; n = 0,1,\ldots\}$ سلسلة ماركوف.

٣- احسب احتمالات انتقال $\{X_n\}$.

(٢,١٠) ليكن $\{X_n\}$ سلسلة ماركوف بفضاء حالة $S = \{0,1,2\}$ ومصفوفة احتمال الانتقالات:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

احسب:

$P(X_{13}=2|X_{11}=1)$ ، $P(X_3=1|X_1=1)$ ، $P(X_3=1|X_1=0)$

(٢,١١) بالعودة إلى مثال (٢,١٦)، خذ $c=2$ و $c=3$ ثم احسب $P^2, P^3, \ldots$.

(٢,١٢) يتحرك جسيم بين الحالات 2 ,1 ,0 بناء على سلسلة ماركوف بمصفوفة احتمال الانتقالات

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

بفرض أن X_n هو موضع الجسيم في التحرك رقم n ، احسب:

$$P(X_n=0|X_0=0), \text{for } n=0,1,2,3,4.$$

(٢,١٣) لتكن $\{X_n\}$ سلسلة ماركوف بمصفوفة احتمال الانتقالات P وضح أن المتغيرات العشوائية $X_1, X_2, \ldots$ تكون مستقلة إذا وفقط إذا كانت جميع صفوف P متطابقة.

(٢,١٤) ما هي مصفوفة احتمال الانتقالات P لسلسلة ماركوف عندما تكون الحالة 2 ماصة؟

(٢,١٥) لنفرض أن المتغيرات العشوائية $\xi_1, \xi_2, \ldots$ مستقلة ولها نفس التوزيع الاحتمالي بدالة الكتلة التالية:

ξ_k	0	1	2	3
$P(\xi_k)$	0.1	0.3	0.2	0.4

بأخذ $X_0=0$ وبفرض أن $X_n=\max\{\xi_1,\xi_2,\ldots\}$ ، احسب مصفوفة احتمال الانتقالات P لسلسلة ماركوف $\{X_n\}$.

(٢,١٦) لنفرض أن N_n يرمز إلى عدد مرات النجاح خلال عدد n من محاولات برنوللي، حيث إن احتمال النجاح في أي محاولة هو p ، ومن ثَم فإن N_n سلسلة ماركوف بفضاء الحالة $S=\{0,1,2,\ldots\}$ وتوزيع ابتدائي $p_0^{(0)}=1, p_j^{(0)}=0, j\geq 1$ واحتمالات انتقالات:

$$p_{ij} = P(N_{n+1} = j \mid N_n = i) = \begin{cases} p, & \text{if } j = i+1, \\ q, & \text{if } j = i, \\ 0, & \text{otherwise}. \end{cases}$$

مصفوفة احتمال الانتقالات هي:

$$P = \begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & q & p & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & q & p & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & q & p & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

وضح أن احتمالات الانتقال بعد n من الخطوات هي:

$$p_{ij}^{(n)} = \binom{n}{j-i} p^{j-i} q^{n-j+1},\ j = i, \ldots, n+i$$

(٢,١٧) عملية العمر - بالعودة إلى مثال (٢,٢٦) ولكن بدلاً من اعتبار زمن الحياة المتبقي عند اللحظة n، دعنا نفرض أن Y_n هو عمر المُعَدَّة في الاستخدام عند اللحظة n. لأي قيمة n، $Y_{n+1} = 0$ إذا أخفقت المُعَدَّة أثناء الدورة $n+1$، $Y_{n+1} = Y_n + 1$ إذا لم تخفق خلال الدورة $n+1$.

١- وضح أن:

$$q_i = P(Y_{n+1} = i+1 \mid Y_n = i) = \begin{cases} 1 - p_1, & \text{if } i = 0, \\ \frac{1 - p_1 - \cdots - p_{i+1}}{1 - p_1 - \cdots - p_i} & \text{if } i \geq 1. \end{cases}$$

٢- وضح أن $\{Y_n; n = 0, 1, \ldots\}$ سلسلة ماركوف بفضاء الحالة $S = \{0, 1, \cdots\}$ ومصفوفة احتمال انتقالات:

$$P = \begin{pmatrix} 1-q_0 & q_0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1-q_1 & 0 & q_1 & 0 & \cdots \\ 1-q_2 & 0 & 0 & q_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

(٢,١٨) حاويتان A ، و B تحويان على N من الجزيئات. تم أخذ جزيء عشوائيًا من أحد الحاويتين عند اللحظة n ثم وضع في الحاوية الأخرى، حيث إن جميع الجزيئات لنفس فرص الاختيار. بفرض أن X_n هو عدد الجزيئات الموجودة في الحاوية A عند اللحظة n.

١- وضّح أن $\{X_n\}$ سلسلة ماركوف.

٢- مثّل انتقالات $\{X_n\}$ بالرسم.

(٢,١٩) (نموذج جرّة إهرنفست) لنفرض أنه يوجد صندوقان A ، و B يحتويان على عدد $2a$ من الكرات المتماثلة، بحيث يحتوي الصندوق A على k من الكرات، أما الصندوق B فيحتوي على الكرات المتبقية وعددها $2a-k$ من الكرات. أُخِذَتْ كرة عشوائيًا من أحد الصندوقين ثم وُضِعَتْ في الصندوق الآخر، ثُم تم إجراء هذه العملية عددًا من المرات. من الواضح أن كل عملية اختيار تمثل انتقالاً للعملية العشوائية وأن الكرات تتأرجح بين الصندوقين. ليكن Y_n هو عدد الكرات في الصندوق A عند المرحلة n ، وبتعريف $X_n = Y_n - a$. وضح أن $\{X_n\}$ تكون سلسلة ماركوف ثم احسب احتمالات انتقالاتها.

مساعدة: الحالات هي $i = -a, -a+1, \ldots, -1, 0, +1, \ldots, +a$ و احتمال الانتقال هو:

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{a-i}{2a}, & \text{if } j = i+1, \\ \frac{a+i}{2a}, & \text{if } j = i-1, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

(٢,٢٠) (نموذج برنوللي – لابلاس للانتشار) هذه المسألة تمثل نموذجاً احتمالياً لتدفق سائلين غير قابلين للإنضغاط بين حاويتين. لنفرض أنه يوجد صندوقان A ، و B يحتوي كل منهما على m من الكرات، ومن بين الكرات جميعًا b من الكرات السوداء، والباقية وعددها $2m-b$ من الكرات البيضاء. يقال للنظام إنه في الحالة m إذا كان الصندوق A يحتوي على i من الكرات السوداء (ومن ثَم يحتوي أيضًا على $k-i$

من الكرات البيضاء والصندوق الآخر يحتوي على $b-i$ من الكرات السوداء و $m-b+i$ من الكرات البيضاء). أجري عدد من المحاولات على الصندوقين وفي كل محاولة يتم سحب كرة عشوائياً من كل صندوق ثم يعكس مواضع الكرتين، وضح أن الحالات المتتابعة (المتعاقبة) لهذا النظام تكون سلسلة ماركوف واحسب احتمال انتقالاتها.

(٢,٢١) يتحرك جزيء بين ثلاث حالات 0، 1، 2 بحسب سلسلة ماركوف بـ م.ح.ن. التالية:

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

بفرض أن X_n يرمز إلى موضع الجزيء عند الانتقال رقم n، احسب $P(X_n = 0 \mid X_0 = 0)$ لقيم $n = 0,1,2,3,4$.

(٢,٢٢) بالعودة إلى نظام الاتصالات الموضح في المثالين (٢,١)، (٢,٥) ولكن $X_0 = 0$ هي الإشارة المرسلة عند اللحظة 0.

١- احسب احتمال عدم وجود خطأ حتى المرحلة رقم 2، أي احسب:

$$P(X_0 = 0, X_1 = 0, X_2 = 0)$$

٢- احسب احتمال استقبال الإشارة الصحيحة في المرحلة رقم 2. **مساعدة**: احسب:

$$P(X_0 = 0, X_1 = 0, X_2 = 0) + P(X_0 = 0, X_1 = 1, X_2 = 0)$$

٣- احسب احتمال البث الصحيح خلال خمس قنوات $P(X_5 = 0 \mid X_0 = 0)$.

(٢,٢٣) بفرض أن $p_j^{(n)} = P(X_n = j)$ أثبت صحة العلاقة التالية:

$$p_j^{(n)} = \sum_{k=1}^{N} p_k^{(n-1)}\, p_{kj}$$

(٢,٢٤) لتكن $\{X_n\}$ سلسلة ماركوف مصفوفة احتمال انتقالاتها هي:

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.1 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 0.4 & 0.1 & 0.5 \end{pmatrix} \end{array}$$

احسب $P(X_2 = 2)$ إذا علمت أن العملية بدأت من الحالة 1، أي أن $X_0 = 1$.

(٢,٢٥) بفرض أن $\{X_n\}$ سلسلة ماركوف بـــ م.ح.ن. التالية:

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.5 & 0.1 & 0.4 \\ 0.5 & 0.2 & 0.3 \end{pmatrix} \end{array}$$

وأن توزيعها الابتـــدائي هـــو $p_0^{(0)} = 0.5, p_1^{(0)} = 0.5$ ، احـــسب $P(X_2 = 0)$، $P(X_3 = 0)$.

(٢,٢٦) بفرض أن $\{X_n\}$ سلسلة ماركوف بـــ م.ح.ن. التالية:

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.4 & 0.3 & 0.2 \\ 0.3 & 0.2 & 0.1 & 0.4 \\ 0.2 & 0.1 & 0.4 & 0.3 \end{pmatrix} \end{array}$$

وأن توزيعها الابتدائي هو $p_i^{(0)} = \frac{1}{4}, i = 0,1,2,3$. وضح أن لكل n

$$P(X_n = k) = \frac{1}{4}, k = 0,1,2,3$$

هل يمكن أن تعمم هذه النتيجة لتشمل سلسلة ماركوف بعدد محدود m من الحالات؟

(٢,٢٧) يوجد متجران للأغذية في مدينة معينة. بناء على استبيانٍ اتضح أنه إذا ذهب أحـــد الزبائن إلى المتجر A في أسبوع ما فإنه سيذهب في الأســـبوع التـــالي إلى المتجـــر B باحتمال 0.15 ، أما إذا ذهب أحد زبائن إلى المتجر B في أسبوعٍ ما فـــسيذهب في

الأسبوع التالي إلى المتجر A باحتمال 0.10. بداية 60% من سكان المدينة يشترون من المتجر A ، و40% منهم يشتري من المتجر B . أوجد النسبة بعد أسبوع واحد؟

(٢,٢٨) لتكن $\{X_n\}$ سلسلة ماركوف بفضاء الحالة $S=\{a,b,c\}$ و بـ م.ح.ن. التالية:

$$P=\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \end{array}$$

وأن توزيعها الابتدائي هو $p^{(0)}=\left(\frac{2}{5},\frac{1}{5},\frac{2}{5}\right)$. احسب الاحتمالات التالية:

١- $P(X_1=b,X_2=b,X_3=b,X_4=a,X_5=c\,|\,X_0=a)$

٢- $P(X_1=a,X_2=c,X_3=c,X_4=a,X_5=b\,|\,X_0=c)$

٣- $P(X_1=b,X_3=a,X_4=c,X_6=b\,|\,X_0=a)$

٤- $P(X_1=b,X_2=b,X_3=a)$

٥- $P(X_2=b,X_5=b,X_6=b)$

(٢,٢٩) لتكن $\{X_n\}$ سلسلة ماركوف بفضاء الحالة $S=\{r,w,b,y\}$ و بـ م.ح.ن. التالية:

$$P=\begin{array}{c} \\ r \\ w \\ b \\ y \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} r & w & b & y \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.6 & 0 \\ 0.8 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0.2 & 0.3 & 0 & 0.5 \end{pmatrix} \end{array}$$

احسب $P(X_5=b,X_6=r,X_7=b,X_8=b\,|\,X_4=w)$.

(٢,٣٠) تتحرك سيارة أجرة بين المطار (الحالة 1) والفندق A (الحالة 2) والفندق B (الحالة 3) بناء على سلسلة ماركوف بـ م.ح.ن. التالية:

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0.75 & 0.25 \\ 0.90 & 0 & 0.10 \\ 0.80 & 0.20 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

١- بفرض أن سيارة الأجرة بدأت من المطار فما هـو احتمـال أن تكـون عنـد الفندق A بعد ثلاث انتقالات؟

٢-بفرض أن من الممكن أن تبدأ سيارة الأجرة من المطار باحتمال 0.5 ومن الفندق A باحتمال 0.25 ومن الفندق B باحتمال 0.25، فما هو احتمال أنها ستكون عند الفندق A بعد ثلاث انتقالات؟

الفصل الثالث

المسلك التقاربي لسلاسل ماركوف

Asymptotic Behavior of Markov Chains

(٣,١) مقدمة

سندرس في هذا الفصل المسلك التقاربي asymptotic behavior (المسلك على المدى البعيد long run behavior) لسلاسل ماركوف. الهدف الرئيسي من هذه الدراسة هو حساب احتمال وجود سلسلة ماركوف بعد تنفيذ عدد كبير من الانتقالات في حالة معينة. رياضيا ليكن $\{X_n : n \in T\}$ سلسلة متجانسة ماركوف بفضاء الحالة S وأن $i \in S$، والمطلوب حساب:

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = i)$$

يسمى هذا الاحتمال بالاحتمال النهائي limiting probability. وعمومًا يمكن أن يكون هذا الاحتمال موجودًا ويمكن ألاّ يكون موجوداً. أثناء دراستنا في هذا الكتاب سنفترض أن الاحتمالات النهائية موجودة وسنشرح كيفية حسابها. سنناقش في الفصل التالي الشروط التي يجب تحقيقها حتى تكون مثل هذه الاحتمالات موجودة.

مثـــال (٣,١)

لنعد إلى مثال (٢,٣٦) حيث إن م.ح.ن. بخطوة واحدة تعطى بـــ :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

بينما أن م.ح.ن. بالخطوة- n تعطى بـــ :

$$P^{(n)}=\frac{1}{17}\begin{pmatrix} 9+8\left(-\frac{5}{12}\right)^n & 8-8\left(-\frac{5}{12}\right)^n \\ 9-9\left(-\frac{5}{12}\right)^n & 8+9\left(-\frac{5}{12}\right)^n \end{pmatrix}$$

المطلوب الآن هو حساب الاحتمالات والاحتمالات النهائية التالية:

١- $\lim_{n\to\infty} P^{(n)}$ و $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$

٢- $p_1^{(n)}=P(X_n=1)$ و $\lim_{n\to\infty} P(X_n=1)$

٣- $p_2^{(n)}=P(X_n=2)$ و $\lim_{n\to\infty} P(X_n=2)$

الحل

لاحظ أنه يمكن إعادة كتابة $P^{(n)}$ على الصورة التالية:

$$P^{(n)}=\frac{1}{17}\begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}+\frac{1}{17}\begin{pmatrix} 8\left(-\frac{5}{12}\right)^n & 8\left(-\frac{5}{12}\right)^n \\ 9\left(-\frac{5}{12}\right)^n & 9\left(-\frac{5}{12}\right)^n \end{pmatrix}$$

١- من السهل التحقق من أن:

$$\lim_{n\to\infty} P^{(n)}=\frac{1}{17}\begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$$

ومن ثم فإن:

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}=\begin{cases} \dfrac{9}{17}, & j=1,\ (i=1,2), \\ \dfrac{8}{17}, & j=2,\ (i=1,2). \end{cases}$$

لاحظ أن $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ لا يعتمد على قيمة i.

٢- بفرض أن التوزيع الابتدائي هو $p^{(0)}=\left(p_1^{(0)},p_2^{(0)}\right)$ إذن:

$$\begin{aligned} p_1^{(n)} &= P(X_n = 1) \\ &= \frac{1}{17}\left(p_1^{(0)}, p_2^{(0)}\right)\begin{pmatrix} 9+8\left(\frac{-5}{12}\right)^n \\ 9-9\left(\frac{-5}{12}\right)^n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{17}\left\{9\left[p_1^{(0)}+p_2^{(0)}\right]+\left(\tfrac{-5}{12}\right)^n\left[8p_1^{(0)}-9\,p_2^{(0)}\right]\right\} \end{aligned}$$

ومن ثم فإن:

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = 1) = \frac{1}{17}\left[9\left(p_1^{(0)}+p_2^{(0)}\right)\right] = \frac{9}{17}.$$

لاحظ أن هذا الاحتمال النـــهائي لا يعتمـــد علـــى التوزيـــع الابتـــدائي $p^{(0)}$ وأن:

$\lim_{n\to\infty} p_1^{(n)} = \lim_{n\to\infty} p_{i1}^{(n)} = 9/17$.

٣- بالمثل:

$$\begin{aligned} p_2^{(n)} &= P(X_n = 2) \\ &= \frac{1}{17}\left(p_1^{(0)}, p_2^{(0)}\right)\begin{pmatrix} 8-8\left(\frac{-5}{12}\right)^n \\ 8+9\left(\frac{-5}{12}\right)^n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{17}\left\{8\left[p_1^{(0)}+p_2^{(0)}\right]+\left(\tfrac{-5}{12}\right)^n\left[9p_1^{(0)}-8\,p_2^{(0)}\right]\right\} \end{aligned}$$

ومن ثَم فإن:

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = 2) = \frac{1}{17}\left[8\left(p_1^{(0)}+p_2^{(0)}\right)\right] = \frac{8}{17}.$$

نلاحظ ثانية أن الاحتمال النهائي في هذه الحالة أيضًا لا يعتمد على التوزيع الابتـــدائي:

$p^{(0)}$ وأن $\lim_{n\to\infty} p_2^{(n)} = \lim_{n\to\infty} p_{i2}^{(n)} = 8/17$.

يتضح من هذا المثال أنه بالرغم من أن الاحتمـــالات $P(X_n = 1)$ و $P(X_n = 2)$ تعتمد علـــى التوزيـــع الابتـــدائي $p^{(0)}$ إلا أن الاحتمـــالات النهائيـــة $\lim_{n\to\infty} P(X_n = 1)$ و $\lim_{n\to\infty} P(X_n = 2)$ لا تعتمد علـــى $p^{(0)}$. لـــذا فـــإن الاحتمـــالات النهائيـــة تكـــون $\lim_{n\to\infty} P(X_n = 1) = 9/17$ و $\lim_{n\to\infty} P(X_n = 2) = 8/17$ بغض النظر من أين بـــدأت

العملية العشوائية. تسمى الاحتمالات النهائية في هذه الحالة بـالتوزيع النـهائي limiting distribution أو التوزيـع المـستقر stationary distribution للعمليـة العـشوائية وهو $\left(\frac{9}{17}, \frac{8}{17}\right)$. تحقق النظرية التالية هذه النتائج:

نظرية (٣,١)

لتكن $\{X_n\}$ سلسلة ماركوف بعدد حالات يساوي m والتي لها م.ح.ن. بالخطوة- n $P^{(n)} = \left(p_{ij}^{(n)}\right)$. إذا كان:

$$\lim_{n\to\infty} P^{(n)} = \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_m \\ \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_m \end{pmatrix},$$

حيث إن $\pi_1, \pi_2, ..., \pi_m$ تكون محدودة ومستقلة عن i، إذن:

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = j) = \pi_j, \quad j = 1,2,..., m.$$

التوزيع الاحتمالي $(\pi_1, \pi_2, ..., \pi_m)$ يكون مستقلاً عن التوزيع الابتدائي ويسمى بـالتوزيع المستقر أو توزيع الحالة-المستقر steady-state أو النهائي لسلسة ماركوف $\{X_n\}$.

التعبير "التوزيع المستقر" يعني أن هذا التوزيع يكون مستقلاً عن التوزيـع الابتـدائي للعملية، بمعنى أنه يمكن حساب احتمال وجود العملية العشوائية في الحالة $j \in S$ بعد عـدد كبير جدًا من الانتقالات بدون معرفة من أين بدأت العملية العشوائية، وأن هـذا الاحتمـال يؤول إلى القيمة π_j، أي أن:

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = j) = \pi_j, \quad j = 1,2,..., m.$$

مثـال (٣,٢)

لسلسة ماركوف والتي لها م.ح.ن. الآتية:

$$P = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$$

يكون التوزيع النهائي هو (انظر مثالي (٣,٤) و (٣,٥)):

$$\pi = \left(\frac{b}{a+b}, \frac{a}{a+b} \right).$$

لإعطاء مثال عددي، نفرض أن $a = 0.67$ ، $b = 0.75$ ، أي أن:

$$P = \begin{pmatrix} 0.33 & 0.67 \\ 0.75 & 0.25 \end{pmatrix}$$

إذن:

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0.6114 & 0.3886 \\ 0.4350 & 0.5650 \end{pmatrix}, \; P^3 = \begin{pmatrix} 0.4932 & 0.5068 \\ 0.5673 & 0.4327 \end{pmatrix},$$
$$P^4 = \begin{pmatrix} 0.5428 & 0.4572 \\ 0.5117 & 0.4883 \end{pmatrix}, \; P^5 = \begin{pmatrix} 0.5220 & 0.4780 \\ 0.5350 & 0.4560 \end{pmatrix},$$
$$P^6 = \begin{pmatrix} 0.5307 & 0.4693 \\ 0.5253 & 0.4747 \end{pmatrix}, \; P^7 = \begin{pmatrix} 0.5271 & 0.4729 \\ 0.5294 & 0.4706 \end{pmatrix}$$

لاحظ أنه عندما $n = 7$ فإن قيم عناصر الصف الأول في المصفوفة P^7 تساوي قيم عناصر الصف الثاني من خلال الرقمين بعد العلامة العشرية. تعطى الاحتمالات النهائية بـ (انظر مثالي (٣،٤) و (٣،٥)):

$$\pi = \left(\frac{b}{a+b}, \frac{a}{a+b} \right) = (0.5282, 0.4706).$$

حساب التوزيع النهائي (limiting distribution) عن طريق ضرب مصفوفة احتمالات الانتقال في نفسها عددًا كبيرًا من المرات يحتاج إلى جهد كبير وحسابات مطولة. سنقدم قيمًا بعد نظرية تعطي طريقة بديلة لحساب التوزيع النهائي.

الشرط الكافي لضمان وجود التوزيع النهائي هو لبعض القوة k فإن جميع عناصر المصفوفة P^k يجب أن تكون موجبة (أكبر من الصفر). علاوة على ذلك، بمجرد أن تحتوي المصفوفة P^k على عناصر غير صفرية، فإن جميع المصفوفات ذات القوى الأعلى P^{k+n} ، $(n = 1,2,...)$ ، ستحتوي على عناصر غير صفرية. لذلك يكفي أن نختبر المربعات المتعاقبة، P ، P^2 ، P^4 ، P^8 ، .... وأخيرًا لتحديد ما إذا كان جميع عناصر المصفوفة الناتجة من

ضرب مصفوفة احتمال الانتقال في نفسها مرتين أكبر من الصفر، فإنه ليس من الضروري حساب حاصل الضرب الفعلي، ولكن يكفي ملاحظة ما إذا كان حاصل الضرب يساوي صفراً أم لا كما هو متبع في المثال التالي:

مثال (٣,٣)

بفرض أن م.ح.ن. تأخذ الصورة التالية:

$$P=\begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.9 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.9 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.9 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0.9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0.9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 \\ 0.9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 \end{pmatrix}$$

نسجل المدخلات (العناصر) غير الصفرية كـ " * " ونعيد كتابة P على الصورة:

$$P=\begin{pmatrix} * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$$

نقوم الآن بحساب المربعات المتعاقبة حتى تكون جميع العناصر غير صفرية:

$$P^2 = \begin{pmatrix} * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & * & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & 0 & * & 0 \\ * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}, P^4 = \begin{pmatrix} * & * & * & * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & * & 0 & * & 0 \\ * & * & * & * & 0 & 0 & * \\ * & * & * & * & 0 & 0 & * \\ * & * & * & * & 0 & 0 & * \\ * & * & * & * & 0 & 0 & * \\ * & * & * & * & 0 & 0 & * \end{pmatrix},$$

$$P^8 = \begin{pmatrix} * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * \end{pmatrix}.$$

نلاحظ أن جميع عناصر المصفوفة P تكون غير صفرية، ومن ثم فإن التوزيع النهائي يكون موجودًا. ستقدم طريقة حساب التوزيع النهائي في الجزء (٣,٢).

(٣,٢) تحديد التوزيع المستقر

Determination of the stationary distribution

سنعرض في هذا الجزء طريقتين لتحديد التوزيع المستقر.

(٣,٢,١) الطريقة الأولى لتحديد التوزيع المستقر

تعتمد هذه الطريقة على إيجاد مصفوفة الانتقال بعد n من الخطوات $P^{(n)}$ ثم نحسب نهايتها عندما n تقترب من اللانهاية. كما رأينا في المثال (٣,١) أن هذه الطريقة طويلة جدًا ومن ثَم فهي طريقة غير مفضلة في الحسابات، أحيانًا تسمى هذه الطريقة بطريقة المصفوفة القطرية. سنقوم بتوضيح هذه الطريقة بتفصيل أكثر من خلال المثال التالي.

مثـــال (٣,٤)

لنفرض أن $\{X_n\}$ مصفوفة ماركوف بفضاء الحالة S والذي يحتوي على عنـــصرين فقط $S=\{0,1\}$ ، وأن م.ح.ن. تأخذ الصورة التالية:

$$P=\begin{pmatrix}1-\alpha & \alpha\\ \beta & 1-\beta\end{pmatrix}.$$

نريد استخدام طريقة المصفوفة القطرية الموضحة في المثال (٢,٣٦). أولاً نحسب P^2 ، وذلك للتحقق من صحة الناتج النهائي:

$$P^2=\begin{pmatrix}(1-\alpha)^2+\alpha\beta & \alpha(2-\alpha-\beta)\\ \beta(2-\alpha-\beta) & (1-\beta)^2+\alpha\beta\end{pmatrix}$$

ولجعل P مصفوفة قطرية، أولاً نحسب القيم الذاتية لها. لدينا:

$$P-\lambda I=\begin{pmatrix}1-\alpha-\lambda & \alpha\\ \beta & 1-\beta-\lambda\end{pmatrix}$$

ومن ثم فإن:

$$\det(P-\lambda I)=0 \Leftrightarrow (1-\alpha-\lambda)(1-\beta-\lambda)-\alpha\beta=0$$
$$\Leftrightarrow \lambda^2+(\alpha+\beta-2)\lambda+1-\alpha-\beta=0$$

نحسب المميز:

$$\Delta=(\alpha+\beta-2)^2-4(1-\alpha-\beta)=(\alpha+\beta)^2$$

ومن ثَم فإن القيم الذاتية تكون:

$$\lambda_2=1-\alpha-\beta \text{ و } \lambda_1=1$$

يجب أن يحقق المتجه الذاتي $v_1=(x_1,y_1)^T$ المقابل للقيمة الذاتية $\lambda_1=1$ العلاقة التالية:

$$\left(P-\lambda_1 I\right)v_1=0$$

أي أن :

$$\begin{aligned} -\alpha x_1 + \alpha y_1 &= 0, \\ \beta x_1 - \beta y_1 &= 0. \end{aligned}$$

ومن ثَم فإن $x_1 = y_1$ وبذلك فـإن $v_1 = (1,1)^T$. وبالمثـل يمكـن حـساب المتجـه الذاتي $v_2 = (x_2, y_2)^T$ المقابل للقيمة الذاتية λ_2 والذي يحقق أن:

$$(P - \lambda_2 I)v_2 = 0$$

أي أن:

$$\beta\ x_2 + \alpha\ y_2 = 0$$

إذن $x_2 = -\frac{\alpha}{\beta}$ بشرط أن $\beta \neq 0$ ومن ثَم فإن $v_2 = (-\frac{\alpha}{\beta}, 1)^T$. نحصل على مـصفوفة الانتقال Q ومعكوسها Q^{-1} والمصفوفة القطرية D باستخدام القيم الذاتية والمتجهـات الذاتية التي حصلنا عليها كالآتي:

$$Q^{-1} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix} 1 & \frac{\alpha}{\beta} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ و } Q = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\alpha}{\beta} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ و } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-\alpha-\beta \end{pmatrix}$$

والآن، حيث إن $P = QDQ^{-1}$ ، إذن:

$$P^n = QD^nQ^{-1}$$

والتي تقودنا بعد حساب حاصل ضرب المصفوفات إلى استنتاج أن:

$$P^{(n)} = \frac{1}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} + \frac{(1-\alpha-\beta)^n}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix} \alpha & -\alpha \\ -\beta & \beta \end{pmatrix}$$

في المثال التالي سنقوم بدراسة المسلك التقاربي:

مثـال (٣,٥)

في هذا المثال سنقوم بنفس العمل الذي قمنا به في المثال السابق، ولكـن باسـتخدام م.ح.ن. على الصورة التالية:

$$P = \begin{pmatrix} p_{00} & 1-p_{00} \\ 1-p_{11} & p_{11} \end{pmatrix}.$$

نهتم بحساب احتمالات الانتقال بعد n من الخطوات $p_{ij}^{(n)}$. للحصول على هذه المـصفوفة

سنستخدم طريقة مختلفة عن طريقة المصفوفة القطرية المتبعة في المثال السابق. ثم نوضح أنه يوجد عددان حقيقيان $\beta, \gamma, (\gamma \neq 0)$ ومصفوفتان مربعتان A, B بحيث إن:

$$P^n = \left(A + \beta^n B\right)\gamma^{-1},\ n \geq 1.$$

هذه المعادلة (العلاقة) صحيحة عندما $n = 1, 2$.

عندما $n = 1$:

$$\gamma P = A + \beta B \qquad (٣,١)$$

عندما $n = 2$:

$$\gamma P^2 = A + \beta^2 B \qquad (٣,٢)$$

ولكن من (٣,١) نحصل على:

$$(\gamma P)^2 = (A + \beta B)(A + \beta B)$$

$$(\gamma P)^2 = A^2 + \beta^2 B^2 + \beta(AB + BA) \qquad (٣,٣)$$

بمقارنة المعاملات في المعالدتين (٣,٢)، (٣,٣) نحصل على الشروط التالية:

$$A^2 = \gamma A, \quad B = \gamma B, \quad AB = BA = 0 \qquad (٣,٤)$$

بناء على الشرط $AB = BA = 0$ يمكن كتابة المصفوفتين A, B على الصورة التالية:

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ x & y \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} y & -y \\ -x & x \end{pmatrix}$$

والآن يمكن أن نختبر صحة العلاقة (٣,٤) بشرط أن $\gamma = x + y$. يمكن حساب كل من x, y, β باستخدام المعادلة (٣,١). ويمكن كتابة المعادلة (٣,١) في نظام مكافئ من ثلاث معادلات على الصورة التالية:

$$(x + y)p_{00} = x + \beta y \qquad (٣,٥)$$

$$(x + y)(1 - p_{00}) = y - \beta y \qquad (٣,٦)$$

$$(x + y)p_{11} = y + \beta x \qquad (٣,٧)$$

بإضافة المعادلة (٣,٥) إلى المعادلة (٣,٧) نحصل على:

$$(x + y)(p_{00} + p_{11}) = (x + y)(1 + \beta)$$

أي أنه إذا كان $\gamma \neq 0$ ، فإن:

$$\beta = p_{00} + p_{11} - 1$$

وبالتعويض في المعادلة (٣,٦) ، نحصل على:

$$(x+y)(1-p_{00}) = y - y(p_{00} + p_{11} - 1)$$

أي أن:

$$x(1-p_{00}) = y(1-p_{11})$$

ومن ثم فإن:

$$\begin{aligned} x &= \alpha(1-p_{11}) \\ y &= \alpha(1-p_{00}) \end{aligned}$$

من الواضح أن كلاً من x, y يكون معتمدًا على الثابت α، وببساطة يمكن فرض أن $\alpha = 1$. ومن ثَم فإن $\gamma = x + y = 2 - (p_{00} + p_{11})$ لا تساوي الصفر وأن $\beta = p_{00} + p_{11} - 1$. وأخيرًا يمكن الحصول على A, B في الصورة التالية:

$$A = \begin{pmatrix} 1-p_{11} & 1-p_{00} \\ 1-p_{11} & 1-p_{00} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1-p_{00} & p_{00}-1 \\ p_{11}-1 & 1-p_{11} \end{pmatrix}$$

ومن ثم فإن:

$$P^{(n)} = \frac{1}{2-p_{00}-p_{11}} \begin{pmatrix} 1-p_{11} & 1-p_{00} \\ 1-p_{11} & 1-p_{00} \end{pmatrix} + \\ + \frac{(p_{00}+p_{11}-1)^n}{2-p_{00}-p_{11}} \begin{pmatrix} 1-p_{00} & p_{00}-1 \\ p_{11}-1 & 1-p_{11} \end{pmatrix}.$$

لدراسة المسلك التقاربي لسلسلة ماركوف $\{X_n\}$ سندرس الحالتين التاليتين:

١- **الحالة الأولى** عندما $|p_{00} + p_{11} - 1| < 1$: ومن ثَم فإن:

$$P^{(n)} \to \frac{1}{2-p_{00}-p_{11}} \begin{pmatrix} 1-p_{11} & 1-p_{00} \\ 1-p_{11} & 1-p_{00} \end{pmatrix} \qquad \text{عندما } n \to \infty$$

لاحظ أن الصفوف متطابقة وكل منها يمثل توزيعاً احتمالياً.

٢- **الحالة الثانية** عندما $|p_{00} + p_{11} - 1| = 1$: توجد هنا حالتان وهما:

(أ) $p_{00}+p_{11}-1=1$ أي أن $p_{00}+p_{11}=2$. ومن ثم فإن $p_{00}=p_{11}=1$ ومن ثم $\gamma=0$ ومن ثم فإن المصفوفة P تكون عبارة عن مصفوفة الوحدة وفي هذه الحالة يكون لدينا $P^{(n)}=P$ ومنها فإن $\lim_{n\to\infty}P^{(n)}=P$.

(ب) $p_{00}+p_{11}-1=-1$ أي أن $p_{00}=p_{11}=0$ ومن ثَم $\gamma=2$. ففي هذه الحالة نجد أن المتتابعة $P^{(n)}$ تتأرجح، ومن ثم فإن النهاية $\lim_{n\to\infty}P^{(n)}$ لا تكون موجودة.

(٣,٢,٢) الطريقة الثانية لتحديد التوزيع المستقر

تقدم النظرية التالية طريقة مبسطة لحساب الاحتمالات النهائية والتي تؤكد أن التوزيع النهائي يكون عبارة عن حل وحيد لمجموعة من المعادلات الخطية. والآن نفترض أن التوزيع النهائي موجود.سنهتم في الفصل التالي بدراسة الشروط الضرورية والكافية لوجود التوزيع النهائي.

نظرية (٣,١)

لتكن $\{X_n\}$ عبارة عن سلسلة متجانسة لماركوف بفضاء الحالة $S=\{0,1,\ldots,m\}$ وأن P هي م.ح.ن. لها. إذن التوزيع النهائي $\pi=(\pi_0,\pi_1,\ldots,\pi_m)$ يكون عبارة عن حل وحيد غير سالب لمجموعة المعادلات الخطية التالية:

$$\pi_j=\sum_{k=0}^{m}\pi_k\,p_{kj}\,,\ (j=0,1,\ldots,m) \qquad (٣,٨)$$

وأن:

$$\sum_{k=0}^{m}\pi_k=1. \qquad (٣,٩)$$

البرهان

بكتابة المصفوفة P^n كحاصل الضرب $P^{n-1}P$ ، أي أن عناصر المصفوفة P^n يمكن كتابتها على الصورة التالية:

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^{m} p_{ik}^{(n-1)} \, p_{kj} \,, \, (i, j = 0,1,\dots,m)$$

والآن نأخذ النهاية عندما $n \to \infty$ نحصل على:

$$\pi_j = \sum_{k=0}^{m} \pi_k \, p_{kj} \,, \, (j = 0,1,\dots,m)$$

لإثبات صحة العلاقة (٣,٩) نتبع الآتي: حيث إن P^n تكون عبارة عن مصفوفة احتمالية؛ إذن لأي $i \in S$ فإن :

$$\sum_{k=0}^{m} p_{ik}^{(n)} = 1.$$

ومرة أخرى نأخذ النهاية عندما $n \to \infty$ لنحصل على:

$$\sum_{k=0}^{m} \pi_k = 1.$$

وهذا يوضح أن $\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_m$ يكون عبارة عن حل غير سالب للنظام الخطي (٣,٨)، (٣,٩). يتبقى أن نثبت أن هذا الحل يكون حلاً وحيداً إلا أننا سنحذف هذا الجزء.

ملاحظة

يمكن كتابة مجموعة المعادلات (٣,٨) في شكل مصفوفة على النحو التالي:

$$\pi = \pi P \qquad (٣,١٠)$$

مثـــال (٣,٦)

ليكن $\alpha, \beta \in (0,1)$ وأن لدينا سلسلة ماركوف بفضاء الحالة $S = \{1,2\}$ ، بـــ م.ح.ن. على الصورة التالية:

$$P = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}.$$

قمنا بالفعل بإيجاد التوزيع المستقر لهذه السلسلة في المثالين (٣,٦) و(٣,٧)، ولكن نريد الآن أن نستخدم نظرية (٣,١) في حساب التوزيع المستقر $\pi = (\pi_1, \pi_2)$. حيث إن π_1, π_2 تكون عبارة عن حل غير سالب للمعادلات التالية:

$$(\pi_1,\pi_2)=(\pi_1,\pi_2)\begin{pmatrix}1-\alpha & \alpha\\ \beta & 1-\beta\end{pmatrix}$$

$$\pi_1+\pi_2=1$$

لدينا:

$$\begin{aligned}\pi_1 &= (1-\alpha)\pi_1+\beta\,\pi_2\\ \pi_2 &= \alpha\,\pi_1+(1-\beta)\,\pi_2\end{aligned}$$

لذلك فإن $\pi_1=\frac{\beta}{\alpha}\pi_2$. وحيث إن $\pi_1+\pi_2=1$ إذن بالتعويض نحصل على:

$$\pi_2=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

وأن:

$$\pi_1=\frac{\beta}{\alpha+\beta}$$

ومن ثم فإننا نحصل على التوزيع المستقر في الصورة التالية:

$$\pi=(\pi_1,\pi_2)=\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta},\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)$$

وهذا هو نفس ما حصلنا عليه في المثالين (٣,٤) و (٣,٥). التوزيع النهائي يعني أنه عندما تكون n كبيرة فإنه لا يهم من أين بدأت العملية العشوائية. وهذا يقود إلى أن:

$$P(X_n=1)\approx\pi_1=\frac{\beta}{\alpha+\beta},$$

$$P(X_n=2)\approx\pi_2=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}.$$

أو:

$$\lim_{n\to\infty}P(X_n=1)=\pi_1=\frac{\beta}{\alpha+\beta},$$

$$\lim_{n\to\infty}P(X_n=2)=\pi_2=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}.$$

مثـــال (٣,٧)

بفرض أن سلسلة ماركوف بفضاء الحالة $S = \{1,2,3\}$ ، م.ح.ن. علـــى الـــصورة التالية:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

أوجد التوزيع المستقر لهذه السلسلة.

الحـــل

يعطى التوزيع المستقر بـــ $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ ، حيث π_1, π_2, π_3 تحقق المعادلات التالية:

$$(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = (\pi_1, \pi_2\ \pi_3) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$$

ومنها نحصل على:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{1}{4}\pi_2 + \frac{1}{6}\pi_3 , \\ \pi_2 &= \frac{1}{3}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2 + \frac{1}{3}\pi_3 , \\ \pi_3 &= \frac{1}{6}\pi_1 + \frac{1}{4}\pi_2 + \frac{1}{2}\pi_3 . \end{aligned}$$

من المعادلتين الأولى والثالثة في النظام الموضح آنفاً ، يمكن الحصول على:

$$\pi_1 - \pi_3 = \frac{1}{2}\pi_1 - \frac{1}{6}\pi_1 + \frac{1}{6}\pi_3 - \frac{1}{2}\pi_3$$

والتي تؤدي إلى أن:

$$\pi_1 = \pi_3$$

وبالتعويض في معادلة المجموع يساوي الوحدة ، نحصل على:

$$\pi_2 = 1 - 2\pi_1$$

والآن بالتعويض في المعادلة الأولى في نظام المعادلات نحصل على:

$$\pi_1 = \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{1}{4}(1-2\pi_1) + \frac{1}{6}\pi_1$$

أي أن:

$$\pi_1 = \frac{3}{10}.$$

وفي النهاية نحصل على:

$$\pi_3 = \frac{3}{10}. \text{ ،} \ \pi_2 = \frac{4}{10}.$$

ومن ثم فإن التوزيع المستقر يكون:

$$\pi = \left(\frac{3}{10}, \frac{4}{10}, \frac{3}{10}\right).$$

وهذا يعني أنه بغض النظر عن أين بدأت السلسلة فإن:

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = 1) = \pi_1 = \frac{3}{10},$$
$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = 2) = \pi_2 = \frac{4}{10},$$
$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = 3) = \pi_3 = \frac{3}{10}.$$

مثـــال (٣,٨)

يختار السيد سعيد كل عام مكاناً لقضاء عطلة نهاية العام من بين ثلاث قارات مفضلة لديه: إفريقية و أوروبا و آسيا بناء على القاعدة التالية: إذا كان قد ذهب في العام الماضي إلى إفريقية فإنه سيذهب إلى أوربا باحتمال $\frac{2}{3}$ أو إلى آسيا باحتمال $\frac{1}{3}$. أما إذا كان قد ذهب إلى أوربا في العام الماضي فإنه سيذهب إلى إفريقية باحتمال $\frac{3}{8}$ أو إلى أوربا مرة ثانية باحتمال $\frac{1}{8}$ أو إلى آسيا باحتمال $\frac{1}{2}$. وأخيرًا إذا كان قد ذهب إلى آسيا في العام الماضي فإنه سيذهب إلى

إفريقية أو إلى أوربا باحتمال متساوٍ. المطلوب:

١- التعبير عن هذه العملية بسلسلة ماركوف ذات ثلاث حالات.

٢- حساب P^2.

٣- إيجاد احتمال أنه بعد مرور زمن كبير جدا سوف يقضي السيد سعيد عطلتـــه في أوربا.

الحـــل:

١- باعتبار أن X_n عبارة عن القارة التي زارها السيد سعيد في العـــام n. إذن X_n تكون سلسلة ماركوف وأن حالاتها هي إفريقية = 1، أورروبا = 2 وآسيا=3. وأن م.ح.ن. لها تكون:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

٢- مصفوفة الانتقال بعد خطوتين تكون:

$$P^2 = \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & \frac{3}{12} & \frac{4}{12} \\ \frac{19}{64} & \frac{33}{64} & \frac{12}{64} \\ \frac{12}{48} & \frac{19}{48} & \frac{20}{48} \end{pmatrix}$$

٣- نريد حساب التوزيع المستقر $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$، والذي يحقـــق أن $\pi = \pi P$ وأن $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$. بعد بعض المعالجات الجبرية مماثلة للتي اتبعناها في مثال (٧,٣) فإن $\pi_1 = 0.3$، $\pi_2 = 0.4$، $\pi_3 = 0.3$. ومن ثَم فـــإن احتمـــال أن السيد سعيد سيقضي عطلته في أوربا بعد مضي فترة زمنية طويلة هو $\pi_2 = 0.4$.

مثـــال (٣,٩)

تم تصنيف الطلب الأسبوعي على سلعة معينة بأنـــه مرتفـــع =1، أو وســـط=2، أو منخفض=3. بفرض أن الانتقال بين هذه الحالات الثلاث يتبع سلسلة ماركوف بـــ م.ح.ن.

$$P=\begin{pmatrix}0.80 & 0.15 & 0.05\\ 0.10 & 0.80 & 0.10\\ 0.10 & 0.30 & 0.60\end{pmatrix}$$

يمكن حساب الاحتمالات النهائية بحل نظام المعادلات التالي:

$$\begin{aligned}\pi_1 &= 0.80\pi_1 + 0.10\pi_2 + 0.10\pi_3\\ \pi_2 &= 0.15\pi_1 + 0.80\pi_2 + 0.30\pi_3\\ \pi_3 &= 0.05\pi_1 + 0.10\pi_2 + 0.60\pi_3\\ 1 &= \pi_1 + \pi_2 + \pi_3\end{aligned}$$

كما يمكن تخمين الحل برفع المصفوفة P لقوة كبيرة كبراً كافياً. فعلى سبيل المثال فإنه يمكن الحصول على الاحتمالات النهائية (باستخدام الحاسوب) بعد 20 خطوة، حيث:

$$P^{20}=\begin{pmatrix}0.333 & 0.500 & 0.167\\ 0.333 & 0.500 & 0.167\\ 0.333 & 0.500 & 0.167\end{pmatrix}$$

ومن ثم فإن $\pi_1 = 0.333$ ، $\pi_2 = 0.5$ ، $\pi_3 = 0.167$. بعد مضي فترة زمنية طويلة فإن مستوى الطلب سيكون عالياً باحتمال $\pi_1 = 0.333$ ومتوسطاً باحتمال $\pi_2 = 0.5$ ، ومنخفضاً باحتمال $\pi_3 = 0.167$.

تمرين (٣,١)

أوجد التوزيع المستقر لسلاسل ماركوف التي لها م.ح.ن. التالية:

$$P=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}، \quad P=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}، \quad P=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

مثال (٣,١٠)

في المثال (٢,٩) قدمنا سلسلة ماركوف بحالتين كنموذج لسقوط المطر على مدينة معينة وكانت م.ح.ن. على الصورة التالية:

$$P = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

حيث إن حالتي السلسلة هما 1، 2 وأن 1= ماطراً، 2 = جافاً. نهتم الآن بحساب احتمـــالات الأيام الماطرة بعد مضي وقت طويل. التوزيع المستقر لهذه السلسلة هو $\pi = (\pi_1, \pi_2)$. حيث أن π_1, π_2 تحقق المعادلات التالية:

$$\pi_1 + \pi_2 = 1$$
$$(\pi_1, \pi_2) = (\pi_1, \pi_2)\begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

من ثَم فإن نظام المعادلات المطلوب حله هو:

$$\begin{aligned} \pi_1 + \pi_2 &= 1, \\ \pi_1 &= 0.8\pi_1 + 0.4\pi_2, \\ \pi_2 &= 0.2\,\pi_1 + 0.6\pi_2 . \end{aligned}$$

باستخدام المعادلة الأولى نحصل على:

$$\pi_1 = 2\pi_2$$

بالتعويض في معادلة المجموع يساوي الوحدة، نحصل على:

$$\pi_2 = \frac{1}{3}$$

ومن ثم فإن:

$$\pi_1 = \frac{2}{3}$$

وهذا يعني أنه بعد إجراء عدد كبير من الانتقالات (عدد كبير من الأيام) فإن:

$$P(X_n = 1) = \pi_1 = \frac{2}{3}$$

ملاحظة (٣,١)

إذا كان π عبارة عن حل للنظام $\pi = \pi P$، إذن فإنه لأي ثابت c يكـــون $c\pi$ أيضًا حلاً لنفس النظام. وحيث إن النظام $\pi = \pi P$، $\sum_i \pi_i = 1$ له على الأكثـــر حـــل

وحيد؛ لذا فإن أي حل للنظام $\pi = \pi P$ سيختلف عن هذا الحل الوحيد للنظام المعني على الأكثر بثابت ضربي وحيد. ومن ثَم فإنه لحل النظام $\pi = \pi P$ ، $\sum_i \pi_i = 1$ يكون من الأسهل أن نوجد حلاً للنظام $\pi = \pi P$ ثم نقوم بمعايرة هذا الحل بقسمة كل عنصر من عناصره على مجموع جميع العناصر وذلك لتحقيق المعادلة المتبقية $\sum_i \pi_i = 1$. أضف إلى ذلك أنه عندما يكون فضاء الحالة غير منتهٍ فإن المعادلات $\pi = \pi P$ تكون غير مستقلة خطياً ومن ثَم فإنه يمكن استبعاد أحدها أثناء استنتاج الحل. وسنوضح كيفية تطبيق ذلك من خلال المثال التالي:

مثــال (٣,١١)

ليكن $\{X_n\}$ سلسلة ماركوف بفضاء الحالة $S = \{1,2,3\}$ وأن بـــ م.ح.ن.:

$$P = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.6 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

يمكن الحصول على التوزيع المستقر بحل النظام $\pi = \pi P$ ، $\sum_i \pi_i = 1$ بالنسبة لـــ π. نقوم أولاً بحل النظام $\pi = \pi P$ بالنسبة لـــ π . ويمكن كتابة $\pi = \pi P$ على الصورة التالية:

$$\begin{array}{lcllll} \pi_1 & = & 0.3\pi_1 & + & 0.6\pi_2 & \\ \pi_2 & = & 0.5\pi_1 & + & & 0.4\pi_3 \\ \pi_3 & = & 0.2\pi_1 & + & 0.4\pi_2 \quad + & 0.6\pi_3 \end{array}$$

يمكن حذف معادلة من هذه المعادلات، بمجرد النظر فإن أسوأ معادلة هـــي المعادلـــة الثالثة، لذا سنلغيها. ولحل المعادلتين المتبقيتين يجب أن نختار قيمة لـــ π_1 نبدأ بها الحل، ولتكن $\pi_1 = 60$. ومن ثَم باستخدام المعادلة الأولى نحصل على:

$$\pi_2 = \frac{60 - 60(0.3)}{0.6} = 70$$

ومن المعادلة الثانية نحصل على:

$$\pi_3 = \frac{70 - 60(0.5)}{0.4} = 100$$

ومن ثم فإن $\pi = (60, 70, 100)$ يكون حلاً للنظام $\pi = \pi P$، ومن ثَم فإن ضرب هــذا الحل في أي ثابت يعطي حلاً آخر لهذا النظام، وحيث إننا نبحث عن حل يحقق أن المجمــوع يساوي واحداً ومن ثَم يمكن ضرب الثابت $c = \frac{1}{60+70+100}$ في $\pi = (60, 70, 100)$. وهذا يعني أن الحل الوحيد للنظام $\pi = \pi P$ ، $\sum_i \pi_i = 1$ هو:

$$\pi = \left(\frac{6}{23}, \frac{7}{23}, \frac{10}{23}\right)$$

ومن ثَم فإن:

$$P^{\infty} = \lim_{n \to \infty} P^n = \begin{pmatrix} \frac{6}{23} & \frac{7}{23} & \frac{10}{23} \\ \frac{6}{23} & \frac{7}{23} & \frac{10}{23} \\ \frac{6}{23} & \frac{7}{23} & \frac{10}{23} \end{pmatrix}$$

بالطبع حساب الاحتمالات النهائية كحل لنظام المعادلات $\pi = \pi P$ ، $\sum_i \pi_i = 1$ يحتاج إلى حسابات كثيرة وتزداد كمية الحسابات المطلوبة عندما يزداد عدد حالات العمليــة العشوائية m. من البديهي أن أحد الطرق اللازمة للتغلب على مثل هذه الصعوبات هــي أن نستخدم أحد الحاسبات الشخصية التي تكون أكثر سرعة كما أنها أصبحت في متناول الجميع.

يمكن استخدام أحد البرامج الرياضية المعروفة لحــل نظــام المعــادلات $\pi = \pi P$ ، $\sum_i \pi_i = 1$.

مثــال (٣,١٢)

اعتبر م.ح.ن. المعطاة في مثال (٣,٣):

$$P=\begin{pmatrix}0.9&0.1&0&0&0&0&0\\0.9&0&0.1&0&0&0&0\\0.9&0&0&0.1&0&0&0\\0.9&0&0&0&0.1&0&0\\0.9&0&0&0&0&0.1&0\\0.9&0&0&0&0&0&0.1\\0.9&0&0&0&0&0&0.1\end{pmatrix}$$

قد أثبتنا أن التوزيع النهائي لسلسلة ماركوف في هذه الحالة موجود. وباستخدام أحد البرامج الرياضية مثل Matlab يمكن كتابة البرنامج التالي :

```
P=[0.9 0.1 0   0   0   0   0;
   0.9 0   0.1 0   0   0   0;
   0.9 0   0   0.1 0   0   0;
   0.9 0   0   0   0.1 0   0;
   0.9 0   0   0   0   0.1 0;
   0.9 0   0   0   0   0   0.1;
   0.9 0   0   0   0   0   0.1];
A=P';
for i=1:7
  A(i,i)=A(i,i)-1 ;
  A(7,i)=1;
end
b=[0; 0; 0; 0; 0; 0; 1];
pi=inv(A)*b
```

لنحصل على التوزيع النهائي التالي:

$$\pi=(0.9, 0.09, 0.009,\ 0.0009, 0.0001, 0.0, 0.0)$$

المصفوفات العشوائية المزدوجة : Doubly stochastic matrices

قد رأينا في الأمثلة (٢,١) ، (٢,٥) ، (٢,١٨) أن م.ح.ن. تسمى مصفوفة عشوائية مزدوجة إذا كان مجموع عناصر كل صف يساوي الواحد وأيضًا مجموع عناصر كل عمـــود يساوي الواحد. رياضيًا المصفوفة $P=\left(p_{ij}\right)$ تكون مصفوفة عشوائية مزدوجة إذا تحقق أن:

$$p_{ij}\geq 0,\ \sum_{k}p_{ik}=\sum_{k}p_{kj}=1\ \forall i,j\in S$$

والآن بفرض أن لدينا مصفوفة عشوائية مزدوجة $P=\left(p_{ij}\right)$ حيث إن $i,j\in\{1,2,\ldots,m\}$ وبفرض أن الاحتمال النهائي π يكون موجوداً، إذن فإنه يكون موزعاً توزيعاً منتظمـــاً. أي أن:

$$\pi=\left(\frac{1}{m},\frac{1}{m},\ldots,\frac{1}{m}\right) \tag{٣,١١}$$

وحيث إنه يوجد حل وحيد لنظام المعادلات $\pi=\pi P$ ، $\sum_{i}\pi_i=1$ عندما يكون التوزيع النهائي موجوداً، إذن نريد أن نثبت أن $\pi=\left(\frac{1}{m},\frac{1}{m},\ldots,\frac{1}{m}\right)$ يكون حلاً وذلـــك لإثبـــات صحة (٣,١١). باستخدام خاصية المصفوفة العشوائية المزدوجة $\sum_{j}p_{jk}=1$ ، يمكن التحقق من أن $\pi=\left(\frac{1}{m},\frac{1}{m},\ldots,\frac{1}{m}\right)$ يحقق نظام المعادلات $\pi=\pi P$ ، $\sum_{i}\pi_i=1$. أي أن:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{m},\frac{1}{m},\cdots,\frac{1}{m}\right)&=\left(\frac{1}{m},\frac{1}{m},\cdots,\frac{1}{m}\right)\left(p_{ij}\right)_{i,j\in S}\\
&=\left(\sum_{j}\frac{1}{m}p_{j1},\sum_{j}\frac{1}{m}p_{j2},\cdots,\sum_{j}\frac{1}{m}p_{jm}\right)\\
&=\left(\frac{1}{m}\sum_{j}p_{j1},\frac{1}{m}\sum_{j}p_{j2},\cdots,\frac{1}{m}\sum_{j}p_{jm}\right)\\
&=\left(\frac{1}{m},\frac{1}{m},\cdots,\frac{1}{m}\right)
\end{aligned}$$

نقدم فيما يلي بعض الأمثلة:

مثـــال (٣,١٣)

في المثالين (٢,١) ، (٢,٥) كانت $m=|S|=2$ إذن فإن التوزيع النـــهائي يكـــون $\pi=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ ، أما في المثال (٢,١٨) فإن $m=|S|=5$ ومن ثَم فإن التوزيـــع النـــهائي هو $\pi=\left(\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{5}\right)$.

مثـــال (٣,١٤)

ليكن Y_n عبارة عن مجموع الأعداد التي تظهر على السطح العلوي عند إلقاء زهرة نرد عدد n من المرات، والمطلوب حساب احتمال أن Y_n يكون أحد مضاعفات العدد 7 بعـــد إجراء التجربة عدداً كبيراً من المرات. ليكن X_n عبارة عن باقي قـــسمة Y_n علـــى 7. إذن $\{X_n\}$ يكون عبارة عن سلسلة ماركوف بالحالات 0، 1، 2، ...،6 وأن م.ح.ن. تكون:

$$P=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \end{pmatrix}$$

من الواضح أن المصفوفة P تكون مصفوفة عشوائية مزدوجة وحيث إن $m=|S|=7$ ومن ثَم فإن التوزيع النهائي يكون $\pi=\left(\frac{1}{7},\frac{1}{7},\frac{1}{7},\frac{1}{7},\frac{1}{7},\frac{1}{7},\frac{1}{7}\right)$. إضافةً إلى ذلك فإن Y_n يكون أحد مضاعفات العدد 7 إذا وفقط إذا كان $X_n=0$ ، إذن فإن الاحتمال النهائي لأن يكون

Y_n أحد مضاعفات العدد 7 هو $\pi_1 = \frac{1}{7}$.

(٣,٣) سلاسل ماركوف غير المنتهية
Infinite Markov chains

ذكرنا في نظرية (٣,١) أن فضاء الحالة يكون محدوداً (منتهياً)، لكن هذه النظرية تظل صحيحة لسلاسل ماركوف التي لها فضاء حالة غير محدود (غير منتهٍ). التوزيع المستقر سيكون عبارة عن الحل الوحيد لنظام لا نهائي من المعادلات: $\pi = \pi P$ ، $\sum_i \pi_i = 1$. سنعرض فيما يلي بعض الأمثلة لتحديد التوزيع النهائي في حالة سلسلة ماركوف غير المنتهية.

مثـــال (٣,١٥) (الخطى العشوائي Random walks)

لنفرض أن $\{X_n\}$ سلسلة ماركوف بفضاء حالة $S = \{0,1,\cdots\}$ و م.ن.ح.:

$$P = \begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ q & 0 & p & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & q & 0 & p & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & q & 0 & p & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}.$$

وبصورة مفصلة فإن نظام المعادلات $\pi = \pi P$ يمكن كتابته على الشكل التالي:

$$\begin{array}{lcllll} \pi_0 & = & q\pi_0 & + \; q\pi_1 & & \\ \pi_1 & = & p\pi_0 & + & q\pi_2 & \\ \pi_2 & = & & p\pi_1 \; + & & q\pi_3 \\ \vdots & & & & & \end{array}$$

باستخدام الملاحظة (٣,١) لنفرض في البداية أن $\pi_0 = 1$ ، إذن نحصل من المعادلـــة الأولى على $\pi_1 = \frac{p}{q}$ ومن المعادلة الثانية على $\pi_2 = \frac{p^2}{q^2}$، ومن الثالثـــة علـــى $\pi_3 = \frac{p^3}{q^3}$، ...، وهكذا. من ثَم فإن:

$$\pi = \left(1, \frac{p}{q}, \frac{p^2}{q^2}, \frac{p^3}{q^3}, \cdots\right)$$

يكون حلا للنظام $\pi = \pi P$. كما يمكن الحصول على أي حل آخر على الصورة:

$$\pi = \left(c, \frac{cp}{q}, \frac{cp^2}{q^2}, \frac{cp^3}{q^3}, \cdots\right)$$

وذلك لأي ثابت غير سالب c.

إذا كانت $p \geq q$ ، إذاً مجموع حدود الحل إما أن يكون غير منتــه إذا كــان $c \neq 0$ ، أو يساوي الصفر إذا كان $c = 0$. في كلا الحالتين فإن $\sum_i \pi_i \neq 1$ ، ومن ثَم فــإن النظــام $\pi = \pi P$ ، $\sum_i \pi_i = 1$ ليس له حل.

من ناحية أخرى إذا كان $p < q$ إذن بأخذ $c = 1 - \frac{p}{q}$ يمكن الحصول على حــل وحيــد للنظام $\pi = \pi P$ ، $\sum_i \pi_i = 1$. إذن في هذه الحالة نحصل على:

$$\pi_j = \left(1 - \frac{p}{q}\right)\left(\frac{p}{q}\right)^j, \quad j = 0,1,2,\cdots$$

وهو عبارة عن التوزيع الهندسي.

مثــال (٣,١٦) (زمن الحياة المتبقي Remaining lifetime)

بفرض مسألة زمن الحياة المتبقي المقدمة في المثال (٢,٢٦). الصيغة المفــصلة لنظــام المعادلات $\pi = \pi P$ في هذه الحالة تأخذ الصورة التالية:

$$\begin{array}{lllll}
\pi_0 & = & p_1\pi_0 & + & \pi_1 \\
\pi_1 & = & p_2\pi_0 & + & \qquad \pi_2 \\
\pi_2 & = & p_3\pi_0 & + & \qquad\qquad \pi_3 \\
\vdots & & & &
\end{array}$$

لنبدأ الحل بفرض أن $\pi_0 = 1$ ، وبحل هذه المعادلات بشكل تتابعي نحصل على الحل التالي:

$$\begin{aligned}
\pi_0 &= 1\\
\pi_1 &= 1-p_1\\
\pi_2 &= 1-p_1-p_2\\
\pi_3 &= 1-p_1-p_2-p_3\\
&\vdots
\end{aligned}$$

من الممكن أن نعاير هذا الحل وذلك لنحصل على الحل الوحيد للنظام $\pi = \pi P$ ، $\sum_i \pi_i = 1$ وذلك إذا وفقط إذا كان:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j &= (p_1+p_2+p_3+\cdots)+(p_2+p_3+\cdots)+(p_3+p_4+\cdots)+\cdots\\
&= p_1+2p_2+3p_3+\cdots\\
&= \Delta < \infty
\end{aligned}$$

لاحظ أن Δ عبارة عن متوسط زمن حياة عنصر من العناصر. ومن ثَم، إذا كان متوسط زمن الحياة Δ لانهائي فإن $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$. أما إذا كان متوسط زمن الحياة Δ نهائياً فإن:

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{1}{\Delta}\left(1-p_1-p_2-\cdots-p_j\right),\ \ i,j\in S.$$

(٣,٤) تمارين

(٣,١) احسب التوزيع النهائي لسلاسل ماركوف التي لها م.ح.ن.

$$P=\begin{pmatrix}0.7 & 0.2 & 0.1\\ 0.0 & 0.6 & 0.4\\ 0.5 & 0.0 & 0.5\end{pmatrix},\ P=\begin{pmatrix}0.6 & 0.3 & 0.1\\ 0.3 & 0.3 & 0.4\\ 0.4 & 0.1 & 0.5\end{pmatrix}$$

$$P=\begin{pmatrix}2/3 & 1/3 & 0\\ 1/3 & 1/2 & 1/6\\ 0 & 1/4 & 3/4\end{pmatrix},\ P=\begin{pmatrix}1/2 & 1/2 & 0\\ 1/3 & 1/3 & 1/3\\ 1/6 & 1/2 & 1/3\end{pmatrix},\ P=\begin{pmatrix}0.1 & 0.1 & 0.8\\ 0.2 & 0.2 & 0.6\\ 0.3 & 0.3 & 0.4\end{pmatrix}$$

(٣,٢) احسب التوزيع النهائي لسلاسل ماركوف التي لها م.ح.ن.

$$P=\begin{pmatrix}0.1 & 0.5 & 0.0 & 0.4\\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0\\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0\\ 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0\end{pmatrix},\ P=\begin{pmatrix}0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4\\ 0.0 & 0.3 & 0.2 & 0.5\\ 0.0 & 0.0 & 0.6 & 0.4\\ 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0\end{pmatrix}$$

$$P=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4\\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2\end{pmatrix}$$

(٣,٣) احسب التوزيع النهائي لسلسلة ماركوف التي لها م.ح.ن.

$$P=\begin{pmatrix}0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0\\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0\\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0\\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2\\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0\end{pmatrix}$$

(٣,٤) ليكن T عبارة عن زمن الحياة النشط لأحد عناصر جهاز كمبيوتر والذي يقاس بوحدات منفصلة، أي أنه عبارة عن متغير عشوائي منفصل حيث إن:

$$P(T=1)=0.1,\quad P(T=2)=0.3,$$
$$P(T=3)=0.2,\quad P(T=4)=0.4.$$

بفرض أن أحد الأجهزة بدأ بعنصر جديد وعندما يتعطل فإنه يتم استبداله بعنصر جديد. أوجد احتمال تعطل هذا العنصر في فترة معينة وذلك بعد استخدام الجهاز عدداً كبيراً من المرات.

(٣,٥) بفرض أن لديك ماكينة يمكن مشاهدة حالتها عند أي لحظة وتصنيفها لتكون في أحد الحالات الثلاث التالية:

الحالة ١ : تعمل بشكل جيد.

الحالة ٢ : لا تعمل نتيجة عطل.

الحالة ٣ : تحت الإصلاح.

يتم مشاهدة حالة الماكينة في نهاية كل دورة خلال متتابعة من الدورات. ليكن X_n يشير إلى حالة الماكينة في نهاية الدورة رقم n ، حيث إن $n = 1,2,\cdots$ و أن X_0 عبارة عن حالة الماكينة في بداية عملها. باعتبار أن متتابعة حالات الماكينة عبارة عن سلسلة ماركوف باحتمالات الانتقال التالية:

$$\begin{array}{lll} p_{11} = 0.9, & p_{12} = 0.1, & p_{13} = 0, \\ p_{21} = 0, & p_{22} = 0.9, & p_{23} = 0.1, \\ p_{31} = 1, & p_{32} = 0, & p_{33} = 0 \end{array}$$

وأن العملية بدأت من الحالة $X_0 = 1$:

١- أوجد $P(X_4 = 1)$.

٢- احسب التوزيع النهائي.

٣- ما هو احتمال أن تكون الماكينة في التصليح بعد فترة زمنية كبيرة جداً.

(٣,٦) حافلة في عملية سير بين محطات داخلية. يمكن وصف عملية وصول الحافلة إلى أحد المحطات بواحدة من الحالات الثلاث التالية:

الحالة ١ : يصل قبل الوقت المحدد.

الحالة ٢ : يصل في الوقت المحدد.

الحالة ٣ : يصل بعد الوقت المحدد.

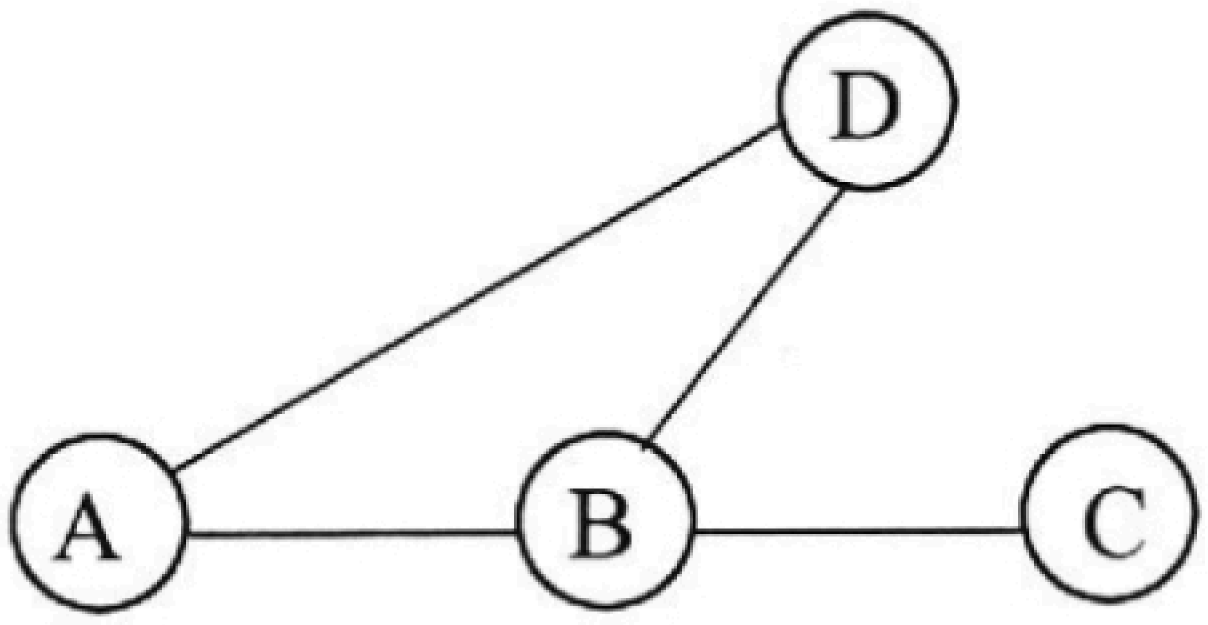
بفرض أن عملية الوصول إلى المحطات المتتابعة تكون عبارة عن سلسلة ماركوف بـ م.ح.ن. معطاة بالآتي :

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.1 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.1 & 0.2 & 0.7 \end{pmatrix}$$

ما هو الاحتمال النهائي لوصول الأتوبيس متأخراً.

(٣,٧) تتصل أربع مدن هي: A ، B ، C ، D بأربعة طرق حديدية كما هو موضح

بالشكل (٣,١). يختار سائق القطار يوميًا، من أي مدينة من هذه المدن الأربع، أحد الطرق بشكل عشوائي للسير من خلاله من أجل الوصول للمدينة التالية وتتكرر هذه العملية في اليوم التالي. المطلوب حساب احتمال وجود القطار في المدينة D بعد فترة زمنية طويلة جدًا.



شكل (٣,١): شبكة السكك الحديدية الموصلة بين المدن الأربع.

(٣,٨) أحد تفسيرات الاحتمالات النهائية π_j ، $j \in S = \{1,2,\cdots,m\}$ ، هو أنه يعطي متوسط نسبة تواجد العملية $\{X_n\}$ في الحالة j على المدى البعيد. من ثَم فإنه إذا كانت كل زيارة للحالة j تكلف القيمة المادية c_j ، إذن متوسط التكلفة لكل وحدة على المدى البعيد لسلسلة ماركوف يكون:

$$C = \sum_{j=1}^{m} c_j \pi_j$$

تحقق من صحة هذا التفسير.

(٣,٩) سلسلة ماركوف بفضاء الحالة $S = \{1, 2, 3\}$ و م.ح.ن. :

$$P = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.5 & 0.1 & 0.4 \\ 0.5 & 0.2 & 0.3 \end{pmatrix}$$

كل دورة تبقى فيها العملية في الحالة 1 تكلف دولارين، وكل دورة تبقى فيها العملية في الحالة 2 تكلف 5 دولارات، وكل دورة تبقى فيها العملية في الحالة 1 تكلف 3 دولارات. ما هي تكلفة الدورة (التكلفة خلال الدورة) لهذه السلسلة على

المدى البعيد.

(٣,١٠) يرى علماء النفس أن الحالة الاجتماعية للأجيال المتعاقبة في عائلة معينة يمكن وصفها بسلسلة ماركوف. من ثَم فإن مهنة الابن (متدنية، متوسطة، مرتفعة) تعتمد على مهنة الوالد ولا تعتمد على مهنة الأجداد. بفرض أن هذا النموذج مناسب وأن مصفوفة احتمالات الانتقال تعطى بالشكل التالي:

$$P = \begin{pmatrix} 0.40 & 0.50 & 0.10 \\ 0.05 & 0.70 & 0.25 \\ 0.05 & 0.50 & 0.45 \end{pmatrix}$$

١- اكتب برنامجاً باللغة التي تختارها لحساب P^n وذلك لقيم $n = 2,4,8,16$.

٢- احسب التوزيع النهائي لهذا النموذج.

٣- لكل مجتمع، ما هي النسبة التي تتمتع بالحالة المتوسطة وذلك على المدى البعيد.

(٣,١١) يتحرك فأرٌ في الفخ الموضح في الشكل (٣,٢). ينتقل الفأر عشوائياً من غرفة إلى أخرى. لتكن X_n رقم الغرفة التي يوجد فيها الفأر بعد عدد n من الانتقالات.

١- تحقق من أن $\{X_n\}$ تكون سلسلة ماركوف، حدد كلاً من فضاء الحالة وفضاء المعلمة وم.ح.ن. لها.

٢- أوجد احتمال أن الفأر ينتقل أولاً إلى الغرفة 2 ثم إلى الغرفة 4 ثم إلى 2 بفرض أنه بدأ من الغرفة 1.

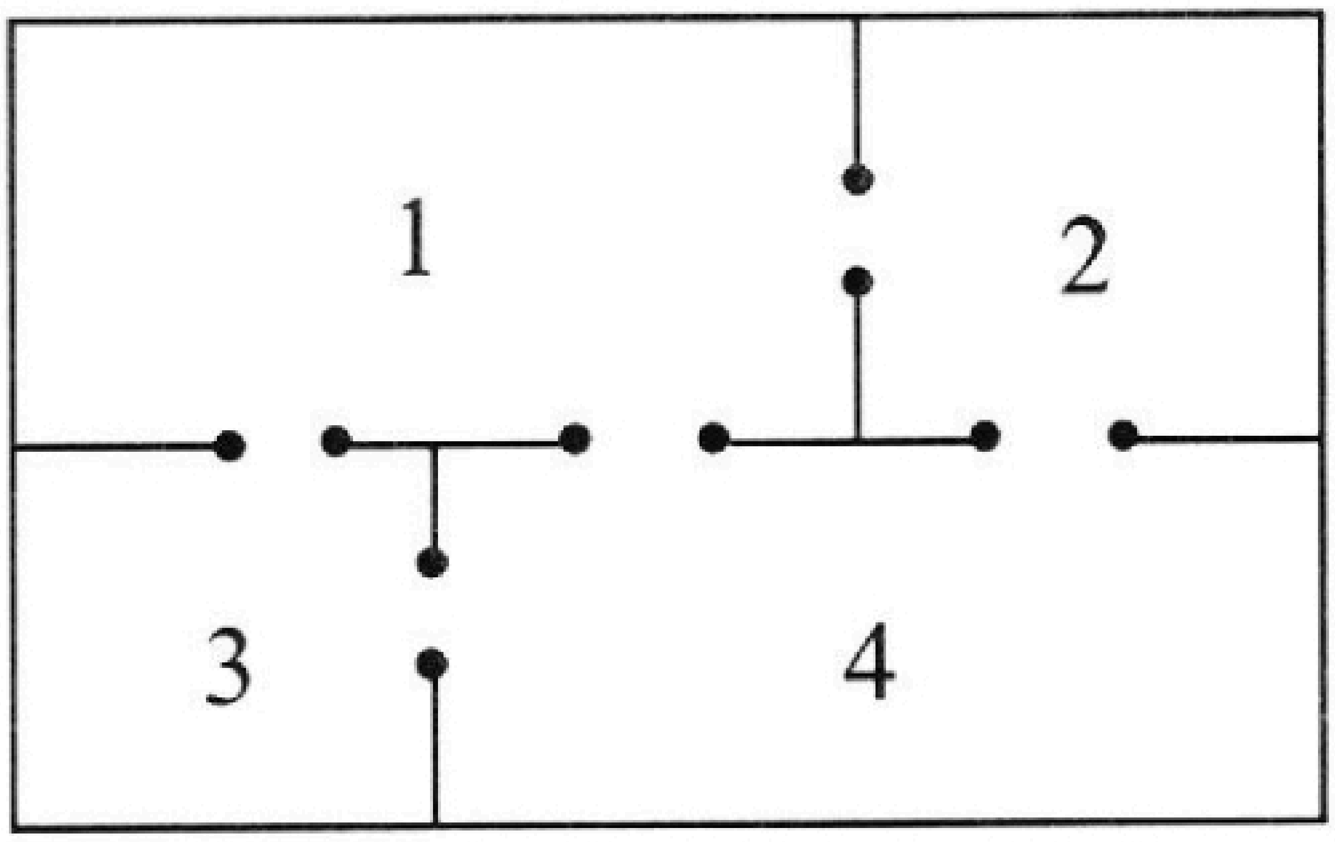
٣- أوجد احتمال أن الفأر ينتقل أولاً إلى الغرفة 1 ثم إلى الغرفة 3 ثم إلى 2 بفرض أنه بدأ من الغرفة 2.

٤- بفرض أن الفأر يمكن أن يبدأ من أي غرفة بنفس الاحتمال، فما هو احتمال أنه يبدأ من الغرفة 1 ثم يمر في الغرف عبر المسار $2 \to 4 \to 2 \to 1$.

٥- ما هو احتمال أن ينتهي الفأر في الغرفة 1 بعد انتقالين بدءاً من الغرفة 1.

٦- ما هو احتمال أن ينتهي الفأر في الغرفة 1 بعد أربع انتقالات بدءاً من الغرفة 1.

٧- أوجد التوزيع النهائي لسلسلة ماركوف $\{X_n\}$.



شكل (٣,٢): فخ المسألة (٣,١١).

(٣,١٢) يمكن لآلة مرطبات أن تكون في واحدة من الحالات التالية: 1= عاملة ولكن في حاجة إلى تصليح خفيف؛ 2= عاملة ولكن في حاجة إلى تصليح جوهري؛ ٣=عاطلة. يمكن وصف انتقالات هذه الآلة من حالة إلى حالة أخرى بسلسلة ماركوف بـ م.ح.ن. التالية:

$$P = \begin{pmatrix} 0.80 & 0.14 & 0.04 & 0.02 \\ 0 & 0.60 & 0.30 & 0.10 \\ 0 & 0 & 0.65 & 0.35 \\ 0.90 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

يقال لسلسلة ماركوف منتهية أنها منتظمة regular إذا وجد عدد صحيح موجب n بحيث يكون جميع عناصر م.ح.ن. بعد n من الخطوات غير صفرية.

١- تحقق من أن هذه السلسلة منتظمة.

٢- أوجد متجه الاحتمالات الحالات المستقرة لهذه السلسلة.

٣- إذا كانت الآلة حالياً عاطلة فكم متوسط عدد الأيام التي تمر لتعود الآلة إلى هذه الحالة؟

(٣,١٣) وضع أحد المدرسين خمس نسخ لامتحان معين في المكتبة و يقوم الطلاب باستعارتها لفترة قصيرة من وقت لآخر، ليكن X_n عدد النسخ المتاحة للاستعارة في اليوم n، وبفرض أن $\{X_n\}$ يكون سلسلة ماركوف بـ م.ح.ن. التالية:

$$P = \begin{array}{c|cccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 0 & 0.9 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0.1 & 0.8 & 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0.1 & 0.8 & 0.1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0.1 & 0.8 & 0.1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.8 & 0.1 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.9 \end{array}$$

١- إذا وُجِدَت خمس نسخ في الوقت الراهن، فما هو احتمال ألاّ يوجد أي نسخة بعد خمسة أيام؟

٢- إذا وُجِدَت خمس نسخ في الوقت الراهن، فما هو احتمال وجود ثلاث نسخ على الأقل بعد ثلاثة أيام؟

٣- أوجد متجه احتمالات الحالة المستقرة لهذه السلسلة.

(٣,١٤) لتكن $\{X_n\}$ سلسلة ماركوف بفضاء الحالة $S = \{0,1,2,3,4,5\}$ وأن مصفوفة احتمالات الانتقال لها:

$$P = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

حيث إن $\alpha_i \geq 0 \, (i = 0,1,\ldots,5)$، وأن $\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_5 = 1$. احسب الاحتمال النهائي لوجود العملية في الحالة 0.

(٣,١٥) لتكن $\{X_n\}$ سلسلة ماركوف بفضاء الحالة $S = \{0,1,\cdots,N\}$ وأن مصفوفة احتمالات الانتقال لها:

$$P = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \cdots & p_N \\ p_N & p_0 & p_1 & \cdots & p_{N-1} \\ p_{N-1} & p_0 & p_1 & \cdots & p_{N-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_0 \end{pmatrix}$$

حيث إن $1 > p_i > 0, \ (i = 0,1,\ldots,N)$، وأن $p_0 + p_1 + \ldots + p_N = 1$. أوجد التوزيع النهائي للسلسلة.

(٣,١٦) لتكن $\{X_n\}$ سلسلة ماركوف بفضاء الحالــة $S = \{0,1,2,\cdots\}$ وأن مــصفوفة احتمالات الانتقال لها:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{7}{8} & 0 & \frac{1}{8} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{15}{16} & 0 & \frac{1}{16} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

أوجد التوزيع المستقر لهذه لسلسلة.

الفصل الرابع

تصنيف حالات سلاسل ماركوف

Classification of the States of Markov Chains

(٤,١) مقدمة

لاحظنا في الفصل السابق أنه ليس لكل سلاسل ماركوف توزيع احتمالي نهائي، كما أن التوزيع التقاربي (النهائي) لسلسلة ماركوف في حالة وجوده يمكن أن يعتمد على شروط ابتدائية. سنوضح أن سلوك سلسلة ماركوف يعتمد على مصفوفة احتمال الانتقال لهذه السلسلة كما أننا في هذا الفصل سندرس العديد من المقاييس لتصنيف حالات سلاسل ماركوف وسنبدأ هذه الدراسة بالمثال التالي:

مثال (٤,١)

سنعرض في هذا المثال ثلاثة أنواع مختلفة من المسالك التقاربية لسلاسل ماركوف:

١- سلسلة ماركوف بـ م.ح.ن. عبارة عن مصفوفة الوحدة:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

تبقى هذه السلسلة في الحالة التي تبدأ منها. وحيث إن $P^n = P$ لكل n ومن ثَم فإن لهذه السلسلة توزيع احتمالي نهائي ولكنه يعتمد على حالاتها الابتدائية.

٢- سلسلة ماركوف بـــ م.ح.ن. على الصورة:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

تتأرجح هذه السلسلة بين الحالتين 1، و2. تسمى هذه السلسلة بالسلسلة الدورية periodic chain ولا يوجد لهذه السلسلة توزيع احتمالي نهائي؛ وذلك لأنه إذا كانت n عدداً فردياً فإن $P^n = P$ أما إذا كانت n عدداً زوجياً فإن P^n تكون مصفوفة الوحدة. سنقدم المزيد عن السلسلة الدورية في البند (٤,٥).

٣- سلسلة ماركوف بـــ م.ح.ن. على الصورة:

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

إذن يمكن الحصول على P^n على الصورة التالية:

$$P^n = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

ومن ثَم فإن:

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

في هذه السلسلة تسمى الحالة 1 بالحالة العابرة transient : أي أنه بعد أن تبدأ العملية من الحالة 1 فإنه من المحتمل ألاَّ تعود إليها أبدًا. سنقدم المزيد عن الحالات العابرة في البند (٤,٣).

إلى جانب السلاسل التي عرضناها وأمثلة سلاسل ماركوف التي لها توزيع احتمالي نهائي فإنه من الممكن دراسة العديد من المسالك المفصلة. لعرض الأنواع المختلفة والمتنوعة لحالات سلاسل ماركوف نحتاج بعض التعاريف وتصنيفات الحالات ومصفوفات احتمالات

الانتقال والتي نقدمها في هذا الفصل. ولتقديم بعض المفاهيم الجديدة المتعلقة بسلاسل ماركوف سنعرض المثال التالي:

مثال (٤،٢)

لنفرض سلسلة ماركوف بفضاء الحالة $S = \{1,2,3\}$ و م.ح.ن.

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

يمكن ملاحظة أن $p_{12} > 0$ وهذا يعني أنه من المحتمل أن تنتقل السلسلة من الحالة 1 إلى الحالة 2. ففي هذه الحالة يقال للحالة 2 أنها ممكنة accessible (يمكن الوصول إليها reachable) من الحالة 1، ويمكن كتابة ذلك بالشكل $2 \to 1$. وبالمثل وحيث إن $p_{21} > 0$ إذن الحالة 1 ممكنة (يمكن الوصول لها) من الحالة 2، أي أن $1 \to 2$. إذا كان $2 \to 1$ و $1 \to 2$ فإننا نقول إن الحالتين 1 و 2 متصلتين communicate ونكتب ذلك بالصورة $2 \leftrightarrow 1$. باعتبار الحالتين 1 و 3، هل هما متصلتان؟ يمكن ملاحظة أنه بمجرد أن تدخل العملية في الحالة 3 فإنها لن تتركها ومن ثَم فإن الحالة 1 لا يمكن الوصول إليها من الحالة 3 كما أن الحالة 2 لا يمكن الوصول إليها من الحالة 3 ومن ثم فإن الحالتين 1 و 3 غير متصلتين وأيضًا الحالتين 2 و 3 غير متصلتين.

تعريف (٤،١)

لتكن i و j حالتين من حالات سلسلة ماركوف، فإن الحالة j تكون ممكنة (يمكن الوصول إليها) من الحالة i إذا كان $p_{ij}^{(n)} > 0$ لبعض القيم غير السالبة لـ n. وهذا يعني أنه باحتمال $p_{ij}^{(n)} > 0$ يمكن للعملية أن تنتقل إلى الحالة j من الحالة i، ونرمز لهذه الخاصية بالرمز $i \to j$.

تعريف (٤,٢)

إذا كانت الحالتان i و j ممكنة من الأخرى فإننا نقول إنهما متصلتان، ونرمز لهذه الخاصية بالرمز $i \leftrightarrow j$.

ومن ثَم فإنه إذا كان $i \leftrightarrow j$ إذن يوجد عددان صحيحان غير سالبين n و m بحيث إن $p_{ij}^{(n)} > 0$ و $p_{ji}^{(m)} > 0$.

مثال (٤,٣)

لنفرض سلسلة ماركوف بفضاء الحالة $S = \{1,2,3\}$ و م.ح.ن.

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

- حيث إن $p_{12} > 0$ و $p_{21} > 0$ إذن $1 \leftrightarrow 2$.
- أيضًا $p_{13} > 0$ و $p_{31} > 0$ يعني أن $1 \leftrightarrow 3$.
- أخيرًا $2 \leftrightarrow 3$ وذلك لأن $p_{23} > 0$ و $p_{32} > 0$.

لاحظ أن الحالة j يمكن أن تكون ممكنة من الحالة i حتى إذا كان $p_{ij} = 0$، ويحدث ذلك عندما تمر العملية العشوائية ببعض الحالات المتوسطة، كما توضحه النظرية التالية. ومن ثَم بغض النظر عن عدد الخطوات اللازمة للانتقال من الحالة i إلى الحالة j، فإننا نقول إن الحالة j ممكنة من الحالة i.

نظرية (٤,١)

إذا كان $i \to j$ و $j \to k$ إذن $i \to k$.

البرهان

حيث إن $i \to j$ إذن يوجد عدد صحيح غير سالب n يحقق أن $p_{ij}^{(n)} > 0$. وبالمثل يوجد عدد صحيح غير سالب m يحقق أن $p_{jk}^{(m)} > 0$. باستخدام معادلات شابمان–

كالموغوروف لدينا:

$$p_{ik}^{(n+m)} = \sum_{r=0}^{\infty} p_{ir}^{(n)}\ p_{rk}^{(m)}$$

وحيث إن جميع حدود المجموع في الطرف الأيمن للمعادلة السابقة عبارة عن كميات غير سالبة ومن ثَم فإن لبعض القيم $j = 0,1,2,\cdots$ يكون:

$$p_{ik}^{(n+m)} \geq p_{ij}^{(n)}\ p_{jk}^{(m)} > 0$$

ومن ثم فإن $i \rightarrow k$ وهذا يكمل البرهان.

مثال (٤,٤)

بفرض أن سلسلة ماركوف بفضاء حالة $S = \{1,2,3\}$ و م.ح.ن.

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \end{array}$$

وضح ما إذا كانت جميع الحالات متصلة مع بعضها أم لا؟

الحل

- حيث إن $p_{13} > 0$ و $p_{31} > 0$ إذن $1 \leftrightarrow 3$.
- دعنا نختبر ما إذا كان $1 \leftrightarrow 2$ أم لا؟ حيث إن $p_{21} > 0$ إذن $2 \rightarrow 1$. وبما أن $p_{12} = 0$ إذن $1 \rightarrow 2$ تكون غير متحققة بمجرد النظر. ولكن وحيث إن $p_{13} > 0$ و $p_{32} > 0$ إذن $1 \rightarrow 3$ و $3 \rightarrow 2$ وباتباع نظرية (١,٤) فإن $1 \rightarrow 2$ ومن ثَم فإن $1 \leftrightarrow 2$.
- بالمثل دعنا نختبر هل $2 \leftrightarrow 3$؟ حيث إن $p_{32} > 0$ إذن $3 \rightarrow 2$. ولكن $p_{23} = 0$ وهذا لا يضمن أن $2 \rightarrow 3$. والآن وحيث إن $p_{21} > 0$ و $p_{13} > 0$ ومن ثَم فإن $2 \rightarrow 1$ و $1 \rightarrow 3$ والتي تعني أن $2 \rightarrow 3$ ومن ثم فإن $2 \leftrightarrow 3$.

وبذلك فإن جميع الحالات متصلة مع بعضها.

تقدم النظرية التالية الشرط الكافي لتكون جميع حالات سلسلة ماركوف متصلة مع بعضها.

نظرية (٤,٢)

جميع حالات سلسلة ماركوف تكون متصلة مع بعضها إذا وُجِدَ عـددٌ صـحيح $n \geq 1$ بحيث إن $p_{ij}^{(n)} > 0$ لكل i و j.

مثال (٤,٥)

لسلسلة ماركوف في المثال (٤,٤)، لدينا:

$$P^2 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \\ \frac{7}{18} & \frac{8}{18} & \frac{3}{18} \\ \frac{17}{48} & \frac{22}{48} & \frac{9}{48} \end{pmatrix} \end{array}$$

وحيث إن $p_{ij}^{(2)} > 0$ لكل i و j إذنِ جميع حالات السلسلة تكون متصلة مع بعضها.

لاحظ أن علاقة الاتصال التي قدمناها تكون علاقة تكافؤ كما توضحه النظرية التالية.

نظرية (٤,٣)

الاتصال بين حالات سلسلة ماركوف تكون علاقة تكافؤ، أي أنها تكـون علاقـة عاكسة ومتماثلة وناقلة.

البرهان

- العلاقة عاكسة: كل حالة i تكون متصلة مع نفسها، أي أن $i \leftrightarrow i$. بالفعل إذا كان $n = 0$ إذن لدينا:

$$p_{ii}^{(0)} = P\{X_0 = i \mid X_0 = i\} = 1$$

وذلك لأنه لأي حادثة A فإن:

$$P(A|A) = \frac{P(A \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$$

- العلاقة متماثلة: إذا كانت i متصلة بـ j إذن j متصلة بـ i. بالفعل إذا كانـت $i \leftrightarrow j$ إذن $j \to i$ و $i \to j$ ومن ثَم فإن $j \leftrightarrow i$.
- العلاقة ناقلة: إذا كانت i متصلة بـ j و j متصلة بـ k إذن متصلة i بـ k. بالفعل إذا كانت $i \leftrightarrow j$ إذن يوجـد عـددان غـير سـالبين m_1 و m_2 بحيـث

إن $p_{ij}^{(m_1)} > 0$ و $p_{ji}^{(m_2)} > 0$. أيضًا حيث إن $j \leftrightarrow k$ إذن يوجد عددان غير سالبين n_1 و n_2 بحيث إن $p_{jk}^{(n_1)} > 0$ و $p_{kj}^{(n_2)} > 0$. باستخدام معادلات شابمان - كالموغوروف فإن:

$$p_{ik}^{(m_1+n_1)} = \sum_{r=0}^{\infty} p_{ir}^{(m_1)}\, p_{rk}^{(n_1)} \geq p_{ij}^{(m_1)}\, p_{jk}^{(n_1)} > 0$$

والتي تعني أن $i \to k$. وبالمثل لدينا:

$$p_{ki}^{(m_2+n_2)} \geq p_{kj}^{(n_2)}\, p_{ji}^{(m_2)} > 0$$

ومن ثم فإن $k \to i$ ومن ثَم فإن $i \leftrightarrow k$ وهذا يكمل البرهان.

مثال (٤,٦)

لسلسلة ماركوف بـــ م.ح.ن.

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

أوجد الحالات التي تتصل ببعضها.

الحل

لهذه السلسلة يمكن التحقق من أن الحالتين 1 و2 متصلتان مع بعضهما. وأيضًا الحالات 3 و 4 و 5 تكون متصلة مع بعضها ولكن لا تكون الحالة 1 ولا الحالة 2 متصلة بأي من الحالات 3 و 4 و 5. ومن ثَم فإنه يمكن وضع الحالتين 1 و 2 في مجموعة $\{1 ، 2\}$ ووضع الحالات 3 و 4 و 5 في مجموعة $\{3 ، 4 ،5\}$. ومن ثَم فإن حالات كل مجموعة متصلة مع بعضها ولكن عناصر المجموعة الأولى لا تكون متصلة مع عناصر المجموعة الثانية.

مثال (٤,٧)

حالات سلسلة ماركوف بـــ م.ح.ن. التالية:

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\
P = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

يمكن وضعها في 4 مجموعات متنافية $\{2، 1\}$ و $\{3\}$ و $\{4\}$ و $\{5\}$. وحيث إن الاتصال بين الحالات يكون علاقة تكافؤ ومن ثَم فإنه من الممكن تجزيء حالات العملية العشوائية المتصلة إلى فصول. جميع الحالات التي تتصل ببعضها تُكون فصلاً. مع ملاحظة أن الفصل يمكن أن يحتوي على حالة مفردة. ومن ثَم فإنه يمكن تقسيم فضاء الحالة إلى العديد من الفصول المتنافية مثنى مثنى. يمكن الوصول إلى أي عنصر من عناصر أي فصل من عنصر من عناصر فصل آخر ولكن لا يمكن أن يكون عنصران من فصلين مختلفين متصلين مع بعضهما. كما أنه بمجرد أن تترك العملية العشوائية حالة من الفصل A وتذهب إلى الحالة من حالات الفصل B فإنها لن تعود ثانية إلى أي حالة من حالة الفصل A. وللحصول على جميع الفصول فإنه يكون من المفيد غالبًا أن نرسم حالات العملية العشوائية ونوضح على الرسم خطوط الانتقالات المباشرة من الحالة i إلى الحالة j إذا كان $p_{ij} > 0$. الهدف من البند التالي هو توضيح الرسم المقابل لسلاسل ماركوف. سوف نقدم في البند (٤,٦) خوارزمية لتحديد الفصول المتكافئة.

(٤,٢) التمثيل البياني لسلاسل ماركوف

Graphical representation of Markov chains

يعتبر التمثيل البياني للعمليات العشوائية أداة مفيدة لتوضيح انتقالات العملية العشوائية. تمثل حالات العملية العشوائية برؤوس الرسم البياني كما يمكن وصف الانتقالات بخطوة بأقواس مدون عليها احتمالات الانتقال. ويساعد هذا التمثيل البياني في تصورنا لسلسلة ماركوف.

تعريف (٤,٣)

لأي سلسلة متجانسة من سلاسل ماركوف بفضاء الحالة S و م.ح.ن. P يمكـــن

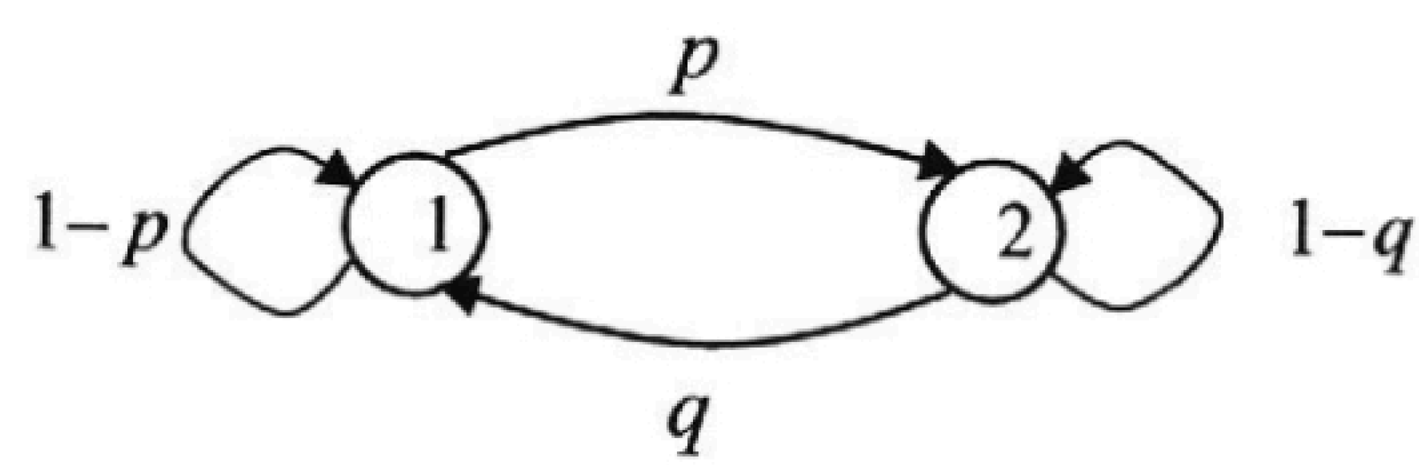
إيجاد رسم بياني $G = (X,U)$ حيث يوجد تقابل بين مجموعة العقد X و فضاء الحالة S ومجموعة الأقواس U بحيث إن $(i,j)\in U \Leftrightarrow p_{ij} > 0$.

مثال (٤,٨)

يمكن استخدام سلسلة ماركوف بحالتين لتمثيل العديد من الأنظمة التي يمكن أن تكون في واحدة من الحالتين إما عاملة وإما عاطلة عن العمل. فإذا كان النظام قد تعطل عن العمل فإنه سيعمل باحتمال p وأما إذا كان عاملاً فإنه سيصبح عاطلاً باحتمال q. من الواضح أن نظام الاتصالات المقدم في المثال (٢,١) يكون من هذا النوع. وبفرض أن الحالة 1 هي حالة العطل والحالة 2 هي حالة العمل فما هو التمثيل البياني لسلسلة ماركوف التي تمثل هذا النظام؟

الحل

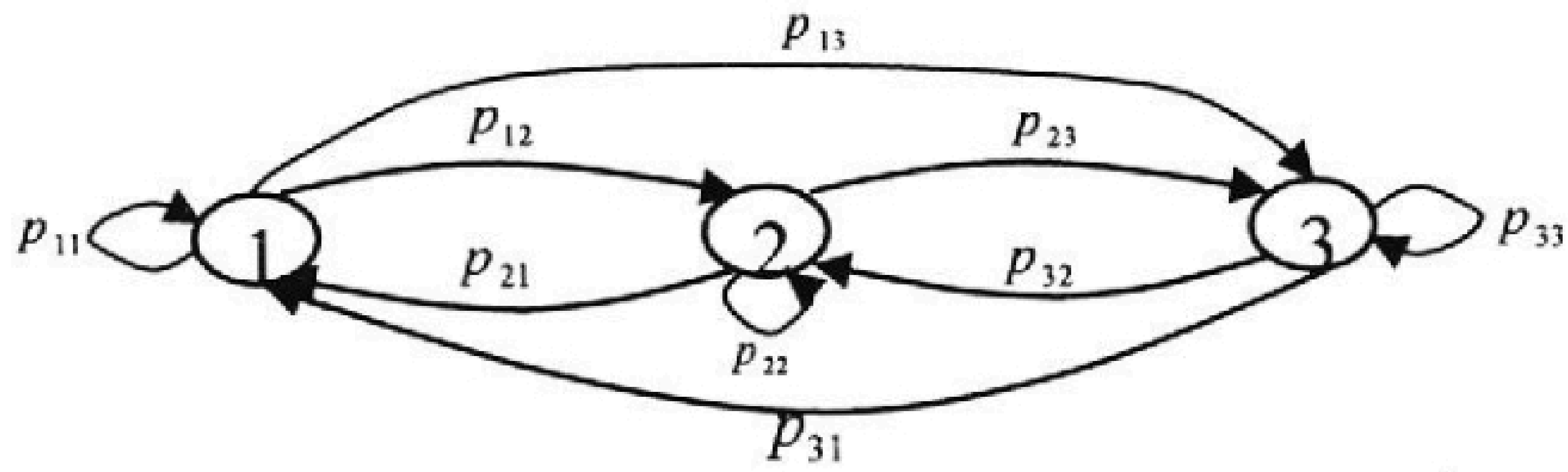
الحالتان 1 و 2 تمثلان حالتي عطل وعمل النظام على الترتيب، ويمكن عرض الرسم البياني الذي يمثل هذا النظام في الشكل (٤,١).



شكل (٤,١): التمثيل البياني لسلسلة ماركوف في مثال (٤,٨).

مثال (٤,٩)

يمكن للقرص المرن في جهاز كمبيوتر أن يكون في واحدة من الحالات الثلاث التالية: 1، 2، 3 والتي تمثل أنه عاطل عن العمل أو يُقرأ منه أو يُكتب عليه على الترتيب. وعند أي لحظة زمنية يتطلب الأمر القراءة من قطاع دائرة في القرص أو الكتابة عليه، يعرض الشكل (٤,٢) الرسم البياني الذي يمثل سلسلة ماركوف لهذا المثال.



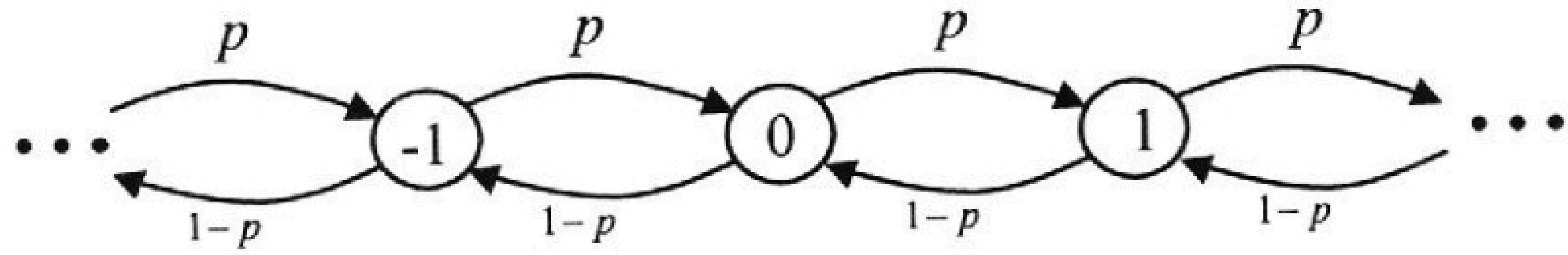
شكل (٤,٢): التمثيل البياني لسلسلة ماركوف في مثال (٤,٩).

مثال (٤,١٠)

أوضحنا في المثال (٢,٢٣) أن موضع شخص ما مرقم بأعداد صحيحة على خط الأعداد الحقيقية، في كل مرحلة ينتقل هذا الشخص بطريقة عشوائية خطوة واحدة إما إلى اليمين باحتمال p وإما إلى اليسار $1-p$. فضاء الحالة لسلسلة ماركوف التي تمثل هذه الظاهرة هو $S=\{\cdots,-1,0,1,\cdots\}$ واحتمالات الانتقال هي:

$$p_{i,i-1}=1-p \quad \text{و} \quad p_{i,i+1}=p$$

التمثيل البياني لهذه السلسلة يعطى في الشكل (٤,٣).



شكل (٤,٣): التمثيل البياني لسلسلة ماركوف في مثال (٤,١٠).

تعريف (٤,٤)

الرسم البياني المختزل للرسم البياني $G=(X,U)$ هو $G'=(X',U')$ بحيث يتحقق ما يلي:

- يوجد تقابل بين مجموعة العقد X' وفصول G.
- لأي قوس $(e,f)\in U'$ $\Leftrightarrow$ يوجد عقدة i للفصل G تناظر e وعقدة j للفصل G تناظر f بحيث إن $(i,j)\in U$.

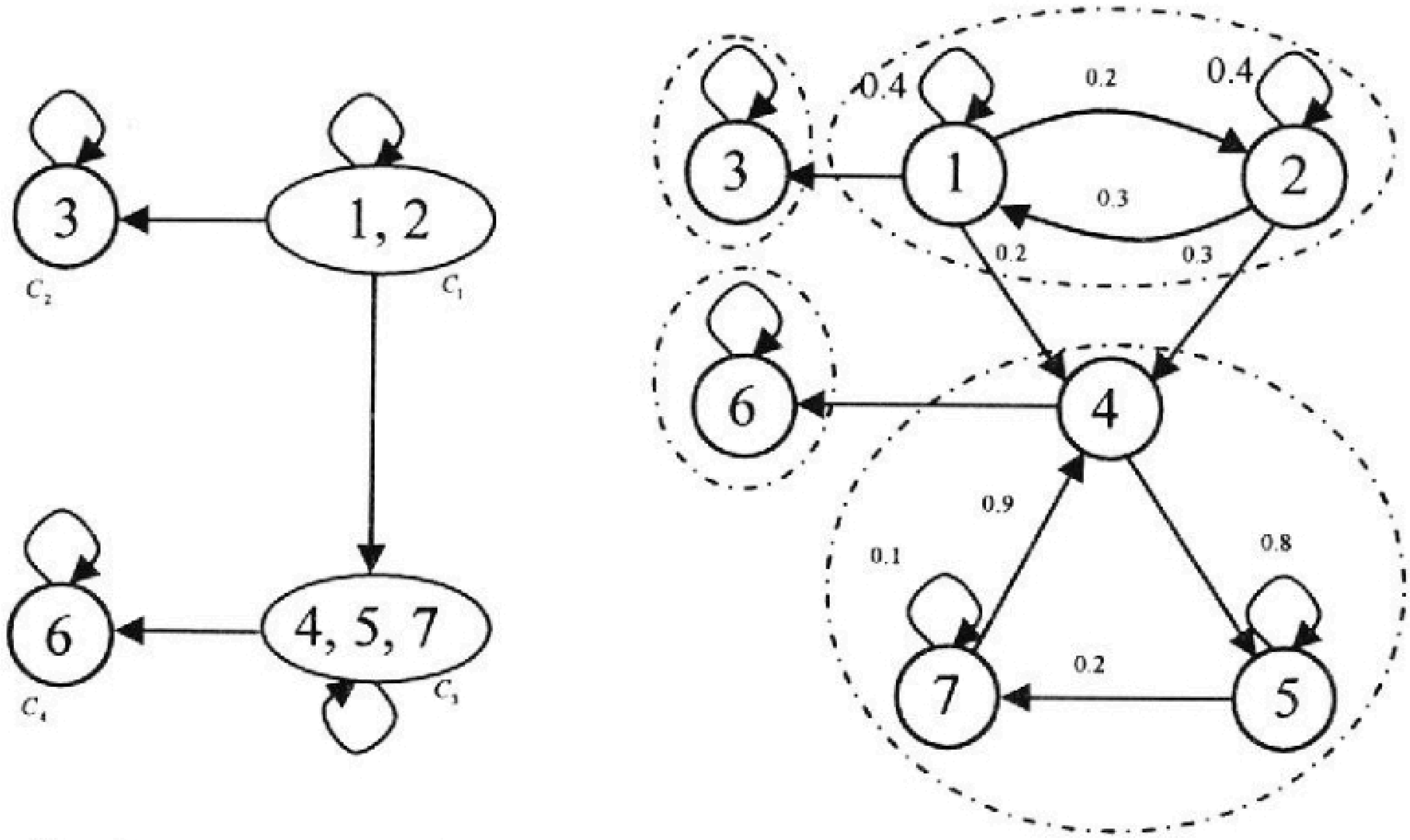
الرسم البياني G' لا يحتوي على دوائر. لاحظ أن الفصل يكون عبارة عن مجموعة من حالات سلسلة ماركوف المتصلة مع بعضها وهي أيضًا تناظر عقدة في الرسم البياني المختزل G'.

مثال (٤,١١)

بفرض سلسلة ماركوف بـــ م.ح.ن.

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.4 & 0 & 0.3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.9 & 0 & 0 & 0.1 \end{pmatrix} \end{array}$$

يوضح الشكل (٤,٤) (أ) الرسم البياني لسلسلة ماركوف (ب) الرسم البياني المختزل لسلسلة ماركوف.



(ب) الرسم البياني المختزل (أ) الرسم البياني

شكل (٤,٤): الرسم البياني والرسم البياني المختزل لسلسلة ماركوف في مثال (٤,١١).

تعريف (٤,٥)

يسمى الفصل بأنه:

- مغلق closed class إذا كانت العقد المقابلة (المناظرة) في G' ليس لها خليفة.
- مفتوح open class في جميع الحالات الأخرى.

وبمعنى مكافئ يقال لمجموعة الحالات $C \subset S$ إنها مجموعة مغلقة إذا كان الوصول إلى أي حالة خارجها غير ممكن من أي حالة من حالاتها. أي أن المجموعة $C \subset S$ تكون مغلقة إذا كان لأي $i, j \in S$ حيث إن $j \notin C$ ، $i \in C$ فإن $i \not\to j$ (أي لايمكن الوصول من الحالة i إلى الحالة j).

نلاحظ أن الحالة التي تكون مجموعة مغلقة مع نفسها تكون حالة ماصة.

تعريف (٤,٦)

يقال لمجموعة الحالات المغلقة بأنها غير مختزلة irreducible إذا كانت لا تحتوي على أي مجموعة مغلقة جزئية فعلية.

تعريف (٤,٧)

تسمى سلسلة ماركوف بأنها غير مختزلة irreducible إذا كان الرسم البياني المختزل لها فصلاً منفرداً، وخلاف ذلك تسمى سلسلة مختزلة.

بناء على التعريف (٤,٧) يتضح من أن جميع حالات سلسلة ماركوف غير المختزلة تكون فصلاً وحيداً، أي أن جميع حالاتها متصلة.

يتضح مما تقدم أهمية أن نعرِف كيفية الحصول على فصول حالات سلاسل ماركوف؛ ولذا سنعطي فيما يلي بعض الأمثلة التي توضح ذلك.

مثال (٤,١٢)

بالعودة إلى سلسلة ماركوف في المثال (٤,١١)، من الشكل (٤,٤) (ب) يمكن ملاحظة أن هذه السلسلة مختزلة؛ وذلك لأنها تحتوي على أربع فصول كما يلي:

١- الفصل $C_1 = \{1,2\}$ له خليفتان ومن ثَم فهو فصل مفتوح.

٢- الفصل $C_2 = \{3\}$ ليس له خليفة ومن ثَم فهو فصل مغلق.

٣- الفصل $C_3 = \{4,5,7\}$ له خليفة ومن ثَم فهو فصل مفتوح.

٤- الفصل $C_4 = \{6\}$ ليس له خليفة ومن ثَم فهو فصل مغلق.

مثال (٤,١٣)

لنفرض أن سلسلة ماركوف بـ م.ح.ن.

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

في هذا المثال نجد أن فضاء الحالة $S = C_1 \cup C_2$ حيث إن $C_1 = \{1,2\}$ و $C_2 = \{3,4,5\}$ فصلان متكافئان. يمكن كتابة P على الشكل التالي:

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix}$$

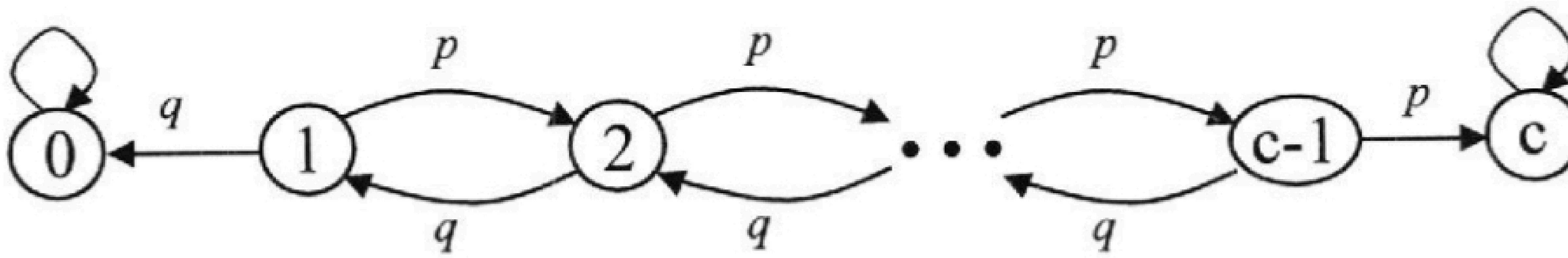
حيث P_1 اختصار للمصفوفة المكونة من أول قيمتين في الصفين الأول والثاني والعمودين الأول والثاني في المصفوفة P ، وبالمثل المصفوفة P_2 أما 0 فعبارة عن مصفوفة صفرية. ومن ثَم يمكن وبسهولة التحقق من أن:

$$P^n = \begin{pmatrix} P_1^n & 0 \\ 0 & P_2^n \end{pmatrix}$$

وهذا التمثيل يكون متحققاً حتى عندما $n \to \infty$ ومن ثَم فإن الفصلين $C_1 = \{1,2\}$ ، $C_2 = \{3,4,5\}$ يكونان مغلقين. ومن الواضح أن كلاً من هذين الفصلين يكون غير مختزل وأن السلسلة تكون مختزلة.

مثال (٤,١٤):

لنعد مرة ثانية لمثال المشي العشوائي بحدود ماصة المدروس في مثال (٢,١٦). الشكل (٤,٥) يوضح الرسم البياني المناظر لسلسلة ماركوف لهذا المثال. من الواضح أن فضاء الحالة لسلسلة ماركوف هنا يمكن كتابتها في الصورة $S = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ حيث إن $C_1 = \{0\}$ و $C_2 = \{1,2,\cdots,c-1\}$ و $C_3 = \{c\}$. ومن ثَم فإن كل مـــن $C_1 = \{0\}$ و $C_3 = \{c\}$ يكون فصلاً مغلقاً (ماصاً absorbing) بينما الفصل $C_2 = \{1,2,\cdots,c-1\}$ مفتوح، ومن ثم فإن السلسلة تكون مختزلة.



شكل (٤,٥): الرسم البياني لمثال المشي العشوائي بحدود ماصة.

مثال (٤,١٥)

سلسلة ماركوف في نموذج طابور المدروسة في المثال (٢,٢٤) لها م.ح.ن. بالصورة:

$$P = \begin{pmatrix} a_0 + a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

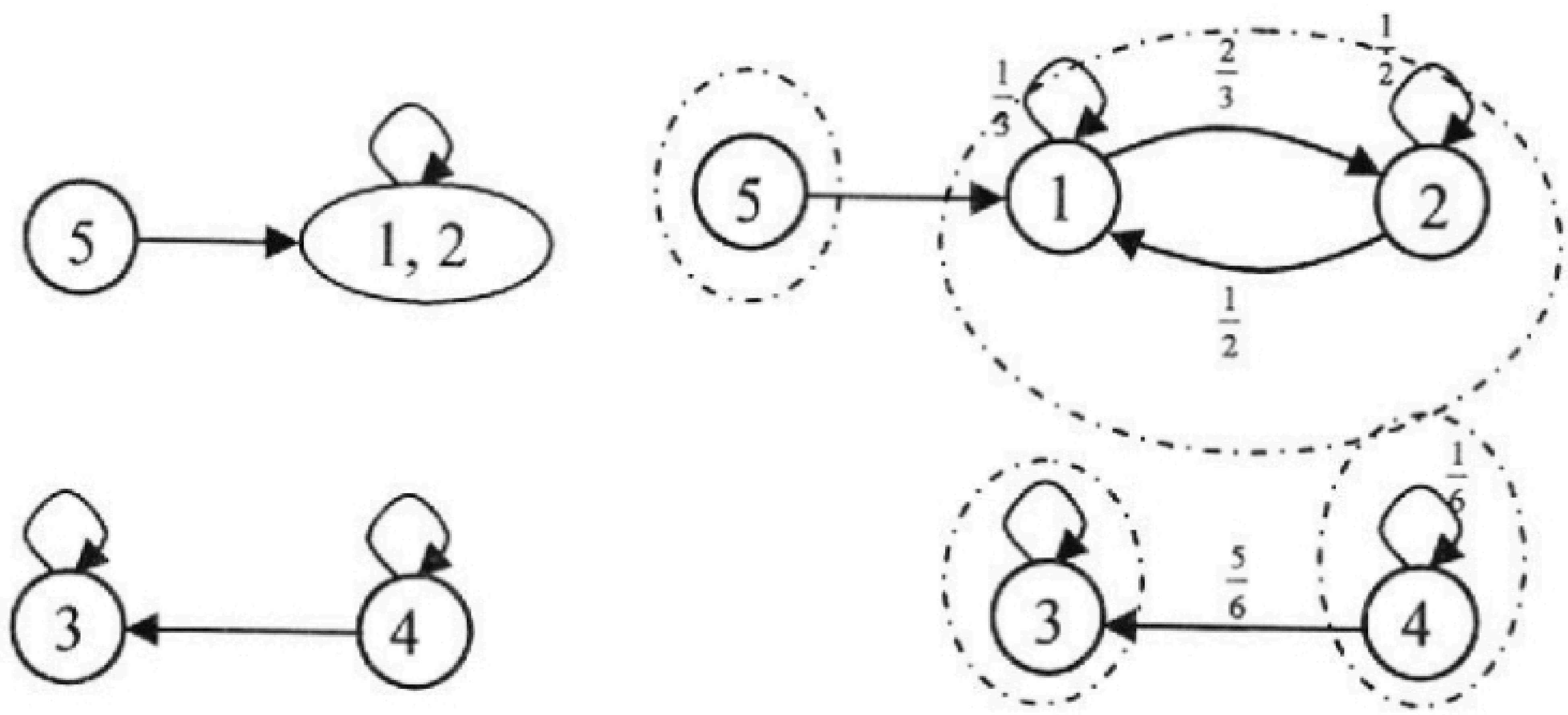
من الواضح أن هذه السلسلة تكون غير مختزلة وذلك لأن جميع حالاتها متصلة ببعضها.

(٤,٣) الحالات العابرة والحالات الارتدادية

Transient and recurrent states

بالنظر إلى مصفوفة انتقال الاحتمال لسلـــسلة مـــاركوف في المثـــال (٤,٧) يمكـــن (وباستخدام التمثيل البياني في الشكل (٤,٦)) التحقق من أنه إذا بدأت السلسلة من الحالة 1 فإنه من المؤكد أنها ستعود مرة أخرى إلى الحالة 1. وفي هذه الحالة تسمى الحالـــة 1 بالحالـــة الارتدادية recurrent و لنفس السبب نجد أن كلاً من الحالتين 2 و 3 تكون أيـــضًا حالـــة

ارتدادية. بينما بمجرد أن تدخل السلسلة الحالة 5 فإنه ليس من المؤكد أن تعود إليها ثانية ومن ثم فإننا نقول بأن الحالة 5 حالة عابرة **transient**.



شكل (٤,٦): الرسم البياني والرسم البياني المختزل لسلسلة ماركوف في المثال (٤,٧).

تعريف (٤,٨)

يقال للحالة i بأنها حالة ارتدادية إذا وفقط إذا كان انطلاقًا من هذه الحالة فإنه من المؤكد العودة إليها ثانية.

الحالة الماصة **absorbing state** تكون حالة خاصة من الحالات الارتدادية وذلك لأنه بمجرد أن تدخل السلسلة هذه الحالة فإنها لن تخرج منها. وبناء عليه فإن الحالة 3 في المثال (٤,٧) تكون حالة ماصة.

تعريف (٤,٩)

يقال للحالة i بأنها حالة عابرة (غير ارتدادية) إذا وفقط إذا كان انطلاقًا من هذه الحالة، فإنه ليس من المؤكد العودة إليها ثانية.

وبمعنى آخر يقال للحالة i إنها عابرة إذا وُجِدَت حالة j بحيث إنها ممكنة من الحالة i ولكن الحالة i غير ممكنة من الحالة j. وبعد عدد كبير من الانتقالات فإن احتمال أن تكون العملية العشوائية في الحالة i يكون مستحيلاً. وفي كل مرة تدخل العملية العشوائية في الحالة i فإنه يكون من المحتمل أنها ستغادرها إلى حالة أخرى j إلى الأبد بدون عودة. ومن ثَم فإنه

من المؤكد الدخول في الحالة j بدون عودة إلى الحالة i.

ولتوضيح ذلك رياضيًا دعنا نفرض أن الحالة الابتدائية للعملية هي $X_0 = i$ والمطلوب هو البحث عن حالة العملية العشوائية في المستقبل. هل ستعود العملية العشوائية ثانية إلى الحالة i؟ ليكن $v_{ii}(n)$ يشير إلى احتمال أن العملية العشوائية ستعود إلى الحالة i لأول مرة بعد عدد n من الانتقالات:

$$v_{ii}(n) = P\left(X_n = i, X_{n-1} \neq i, \cdots, X_1 \neq i \mid X_0 = i\right)$$

ومن ثَم فإن:

$$v_{ii} = \sum_{n=1}^{\infty} v_{ii}(n)$$

هو احتمال عودة العملية العشوائية للحالة i أي احتمال زيارة العملية العشوائية للحالة i. إذا كانت $v_{ii} = 1$ فهذا يعني أنه من المؤكد عودة العملية العشوائية إلى الحالة i وفي هذه الحالة تكون الحالة i ارتدادية، أما إذا كانت $v_{ii} < 1$ فهذا يعني أنه من المحتمل (ليس من المؤكد) عودة العملية العشوائية إلى الحالة i وفي هذه الحالة تكون الحالة i عابرة.

تعريف (٤,١٠)

لتكن $\{X_n\}$ سلسلة ماركوف بفضاء الحالة S. تسمى الحالة $i \in S$:

١- بالارتدادية إذا كان $v_{ii} = 1$.

٢- بالعابرة إذا كان $v_{ii} < 1$.

مثال (٤,١٦)

بالعودة مرة أخرى للمثال (٤,١١) والمثال (٤,١٢) يمكن حساب ما يلي:

$$\begin{aligned}
v_{33}(1) &= P(X_1 = 3 \mid X_0 = 3) = p_{33} = 1, \\
v_{33}(2) &= P(X_2 = 3, X_1 = i, i \neq 3 \mid X_0 = 3) \\
&= p_{i3}\, p_{3i}, i \neq 3 \\
&= 0,
\end{aligned}$$

وعمومًا لأي $n > 1$ فإن:

$$v_{33}(n) = P(X_n = 3, X_{n-1} \neq 3, \cdots, X_1 \neq 3 \mid X_0 = 3)$$
$$\begin{aligned} v_{33}(n) &= P(X_n = 3, X_{n-1} = j, \cdots, X_1 = i, i, j \neq 3 \mid X_0 = 3) \\ &= p_{j3} \cdots p_{3i}, i, j \neq 3 \\ &= 0, \end{aligned}$$

ومن ثَم فإن:

$$v_{33} = \sum_{n=1}^{\infty} v_{33}(n) = v_{33}(1) + \sum_{n=2}^{\infty} v_{33}(n) = 1 + 0 = 1$$

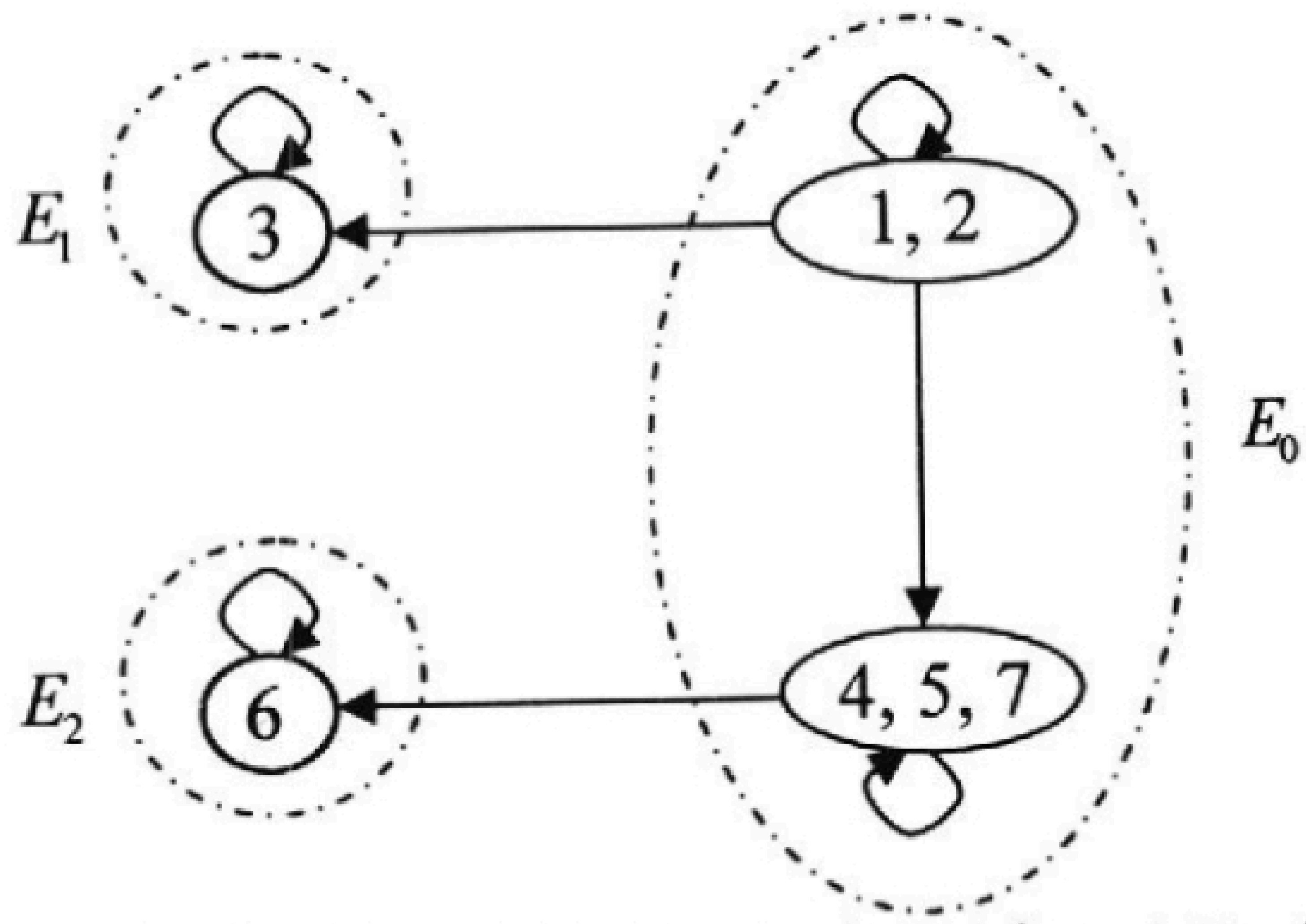
وهذا يعني أن الحالة 3 تكون حالة ارتدادية. وبالمثل يمكن توضيح أن $v_{11} < 1$ والذي يعني أن الحالة 1 حالة عابرة. وكما هو مبين بالشكل (٤,٧) أن حالات المجموعتين E_1 و E_2 تكون حالات ارتدادية أما حالات المجموعة E_0 فتكون حالات عابرة.

نلاحظ أنه يمكن استخدام الرسم البياني للسلسلة في حساب $v_{ii}(n)$ مباشرة وبدون الحاجة إلى الحسابات التفصيلية المستخدمة في حساب $v_{33}(n)$. فمثلاً نلاحظ أن احتمال انتقال السلسلة من الحالة 1 إلى الحالة 1 بعد عمل انتقال واحد، بالعودة إلى الشكل (٤,٤) (أ)، هو $v_{11}(1) = 0.4$، أما $v_{11}(2)$ يمكن حسابه من الرسم مباشرة وبملاحظة أن السلسلة يجب أن تنتقل من الحالة 1 إلى الحالة 2 في الخطوة الأولى ثم تنتقل في الخطوة الثانية من الحالة 2 إلى الحالة 1 ومن ثم فإن $v_{11}(2) = (0.2)(0.3)$، وعمومًا لأي $n \geq 2$ فإنه لكي تنتقل السلسلة من الحالة 1 إلى الحالة 1 لأول مرة بعد عدد n من الانتقالات فإنه يجب أن تنتقل من الحالة 1 إلى الحالة 2 في أول انتقال وتنتقل من الحالة 2 إلى الحالة 1 في آخر انتقال وتدور في الحالة 2 خلال باقي الانتقالات وعددها $n-2$، لذا فإن $v_{11}(n) = (0.2)(0.3)(0.4)^{n-2}$ لأي $n \geq 2$، ومن ثَم فإن احتمال عودة السلسلة إلى الحالة 1 هو:

$$v_{11} = \sum_{n=1}^{\infty} v_{11}(n)$$

$$v_{11} = 0.4 + (0.2)(0.3)\sum_{n=2}^{\infty} (0.4)^{n-2} = 0.4 + \frac{0.06}{1-0.4} = 0.5$$

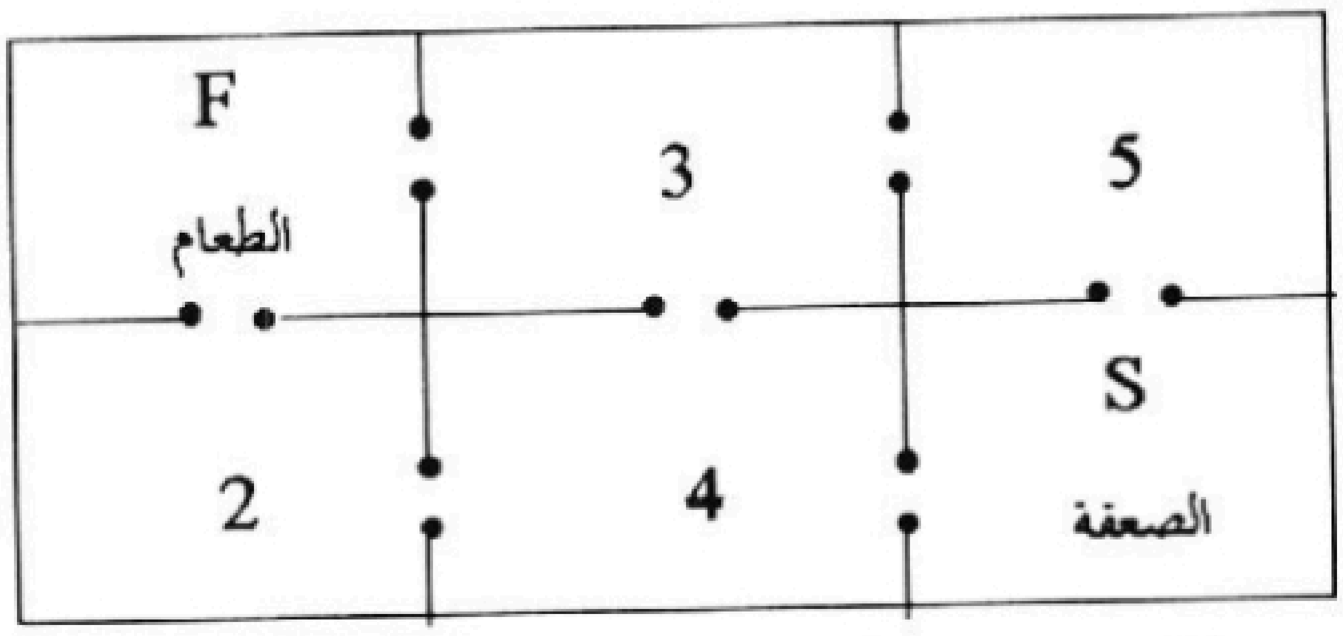
وحيث إن $v_{11} < 1$ إذن الحالة 1 تكون عابرة وهذا ما ذكرناه سابقًا.



شكل (٤,٧): الحالات العابرة والحالات الارتدادية للمثال (٤,١٦).

مثال (٤,١٧)

لنفرض تجربة وقوع فأر في فخ داخل مبنى (مصيدة) مكون من 6 غرف معنونة بالعناوين F و 2 و 3 و 4 و 5 و S كما هو مبين بالشكل (٤,٨). إذا كانت الغرفة تحتوي على عدد k من الأبواب فإن احتمال أن يختار الفأر أحد هذه الأبواب هو $\frac{1}{k}$. إذا وصل الفأر إلى الغرفة F والتي تحتوي الطعام أو إلى الغرفة S والتي سيتلقى فيها صعقة كهربية فإنه سيبقى هناك وتنتهي التجربة.

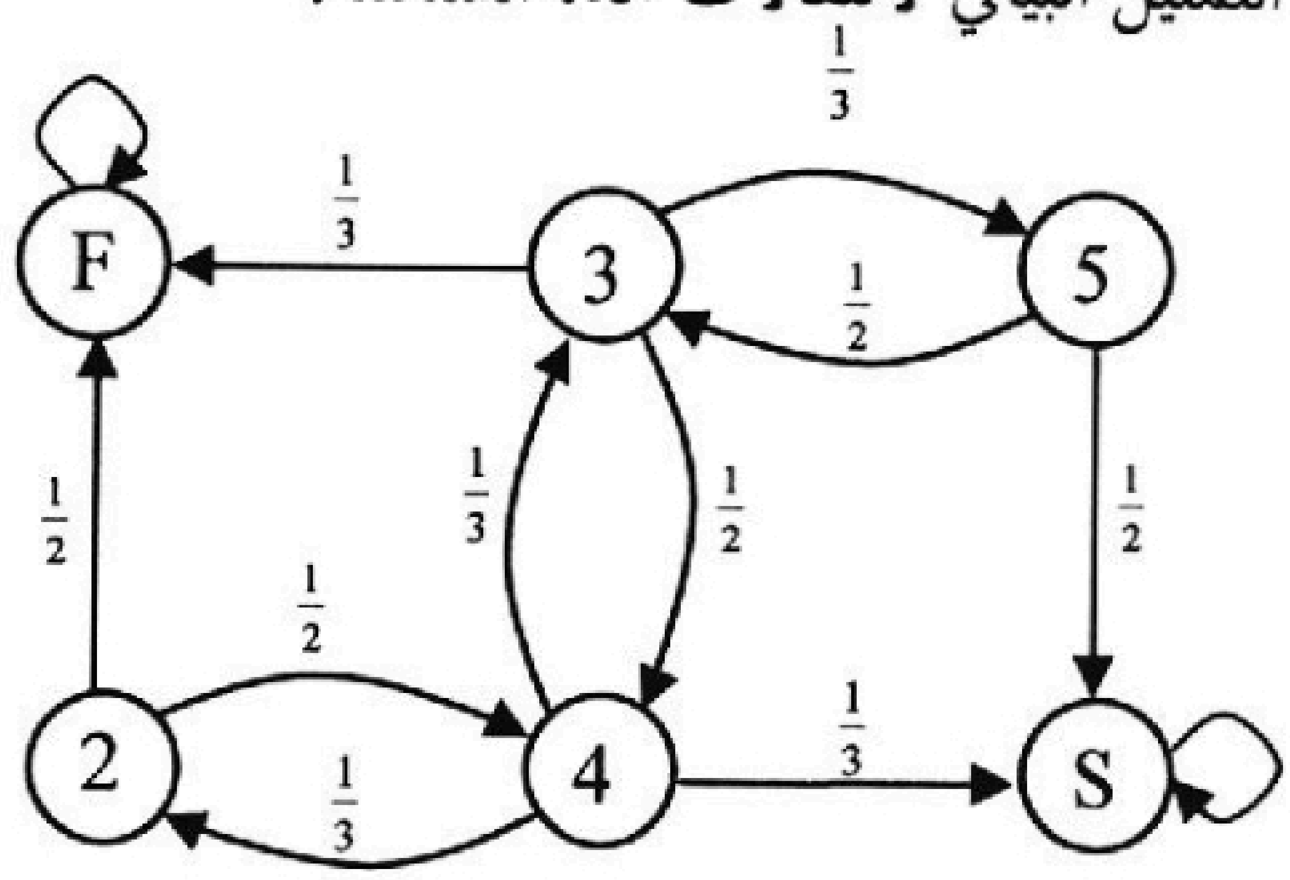


شكل (٤,٨): الفخ المذكور في المثال (٤,١٧).

ليكن R_n يرمز للغرفة التي يكون فيها الفأر عند الخطوة رقم n. من الواضح أن $\{R_n; n = 0,1,2,\cdots\}$ تكون سلسلة ماركوف بفضاء الحالة $S = \{F,2,3,4,5,S\}$ ومصفوفة احتمال الانتقال تعطى بـ:

$$P = \begin{array}{c} \\ F \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ S \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} F & 2 & 3 & 4 & 5 & S \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

يعرض الشكل (٤,٩) التمثيل البياني لانتقالات هذه السلسلة.



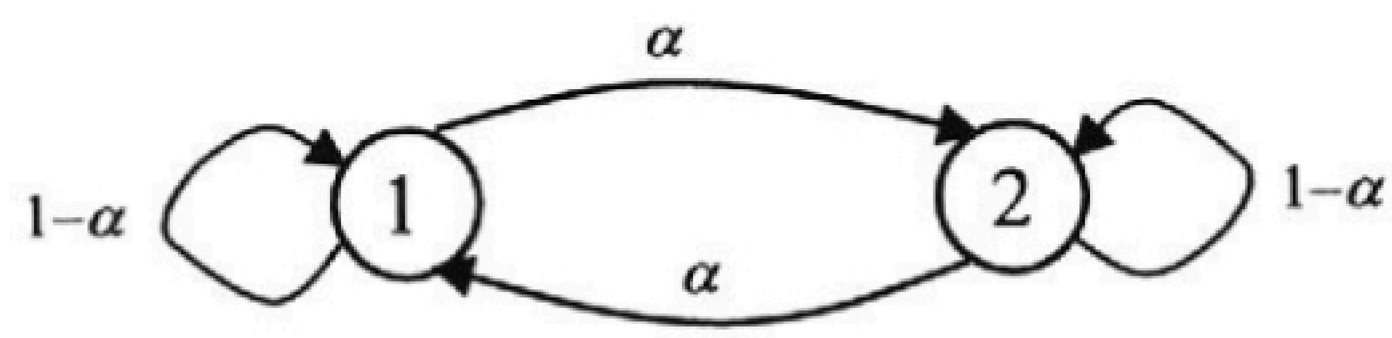
شكل (٤,٩): التمثيل البياني لسلسلة ماركوف في المثال (٤,١٧).

والآن وبعد ترك الغرفة رقم 2 يمكن للفأر إما أن يدخل إلى الغرفة F أو يدخل إلى الغرفة S وينهي التجربة ويقي نفسه من العودة إلى الغرفة رقم 2 مرة ثانية. وبذلك فإن $v_{22} < 1$ ومن ثم فإن الغرفة 2 تكون حالة عابرة.

يوضح المثال التالي كيفية حساب احتمالات العودة v_{ii} لسلسلة ماركوف:

مثال (٤,١٨)

بفرض سلسلة ماركوف المقدمة في المثال (٣,٤) وبفرض أن $\beta = \alpha$، يوضح الشكل (٤,١٠) التمثيل البياني لهذه السلسلة.



شكل (٤,١٠): التمثيل البياني لسلسلة ماركوف في المثال (٤,١٨).

باستخدام التمثيل البياني للسلسلة يمكن حساب $v_{11}(n)$ كما يلي:

$$v_{11}(1) = p_{11} = 1-\alpha \text{ ،}$$

$$v_{11}(2) = p_{12}\, p_{21} = \alpha \cdot \alpha = \alpha^2 \text{ ،}$$

$$v_{11}(3) = p_{12}\, p_{22}\, p_{21} = \alpha(1-\alpha)\alpha = \alpha^2(1-\alpha)$$

وعمومًا لأجل $n \geq 2$ فإن:

$$v_{11}(n) = p_{12}\,(p_{22})^{n-2}\, p_{21} = \alpha^2(1-\alpha)^{n-2}$$

ومن ثم فإن:

$$v_{11} = 1-\alpha + \sum_{n=2}^{\infty} v_{11}(n) = 1-\alpha + \alpha^2 \sum_{n=2}^{\infty}(1-\alpha)^{n-2}$$

$$= 1-\alpha + \frac{\alpha^2}{1-(1-\alpha)} = 1$$

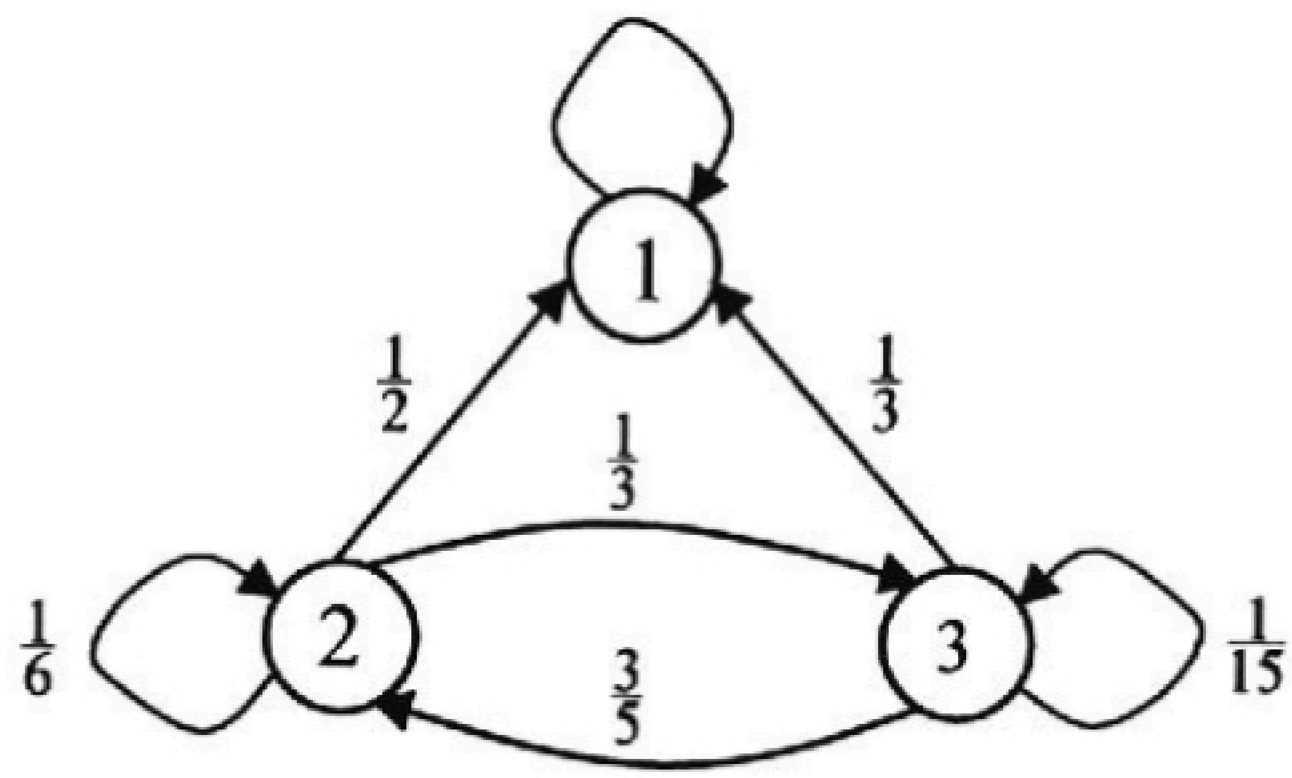
ومن ثَم فإن الحالة 1 تكون حالة ارتدادية.

مثال (٤,١٩)

لنفرض سلسلة ماركوف $\{X_n\}$ بفضاء الحالة $S = \{1,2,3\}$ و م.ح.ن. التالية:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ P = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{3}{5} & \frac{1}{15} \end{pmatrix} \end{array}$$

الشكل (٤,١١) يعرض التمثيل البياني لسلسلة ماركوف $\{X_n\}$.



شكل (٤,١١): التمثيل البياني لسلسلة ماركوف في المثال (٤,١٩).

والمطلوب معرفة هل الحالة 3 تكون عابرة أم ارتدادية؟ وللإجابة على هذا التساؤل نحسب v_{33}. نلاحظ أولاً أن $v_{33}(1) = p_{33} = \frac{1}{15}$. وأيضًا $v_{33}(2) = p_{32}p_{23} = \frac{3}{5}\frac{1}{3}$ وهذا يعني أن انطلاقًا من الحالة 3 فإن العملية ستعود مرة ثانية إلى الحالة 3 بعد خطوتين باحتمال $\frac{1}{5}$ وذلك بالانتقال من الحالة 3 إلى الحالة 2 ثم من الحالة 2 إلى الحالة 3. كما يمكن التحقق من أن $v_{33}(3) = p_{32}p_{22}p_{23} = \frac{3}{5}\frac{1}{6}\frac{1}{3}$ وذلك لأنه لكي تعود العملية أول مرة إلى الحالة 3 بعد ثلاث انتقالات فإنها يجب أن تنتقل في الخطوة الأولى إلى الحالة 2 ثم في الانتقال الثاني تبقى في نفس الحالة 2 ثم في الانتقال الثالث تنتقل من الحالة 2 إلى الحالة 3. والآن لأجل $n \geq 2$ فإن $v_{33}(n) = p_{32}p_{22}^{n-2}p_{23}$ وهذا يعني أن الطريقة الوحيدة للعودة إلى الحالة 3 بعد n من الخطوات لأول مرة بعد تركها لايكون إلا بالانتقال من الحالة 3 إلى الحالة 2 في أول خطوة ثم دوران السلسلة في الحالة 2 خلال الخطوات الثانية والثالثة، ...، الخطوة رقم $n-1$، ثم تنتقل السلسلة في الخطوة الأخيرة رقم n من الحالة 2 إلى الحالة 3. ومن ثَم فإن:

$$v_{33}(n) = \begin{cases} \frac{1}{15}, & n = 1 \\ \frac{3}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-2}\frac{1}{3}, & n = 2,3,\cdots \end{cases}$$

ومن ثم نجد أن:

$$\begin{aligned} v_{33} &= \sum_{n\geq 1} v_{33}(n) = \frac{1}{15} + \frac{1}{5}\sum_{n\geq 2}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-2} \\ &= \frac{1}{15} + \frac{1}{5}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{6}\right)} = \frac{23}{75} \end{aligned}$$

بالبدء من الحالة 3 فإن احتمال ألاّ تعود العملية العشوائية إلى الحالة 3 مرة ثانية هو $\frac{52}{75} = 1 - v_{33}$، وهذا يدل على أن الحالة 3 تكون عابرة. سنقدم طريقة في الفصل الخامس لحساب الاحتمالات v_{ii}.

والآن سنعرض بعض خواص الحالات الارتدادية والحالات العابرة. من الطبيعي لسلاسل ماركوف أنه بمجرد أن تعود السلسلة إلى الحالة الارتدادية i، فإنها ستنسى حالاتها في الماضي ومن ثم فإنه من المؤكد أنها ستعود ثانية إلى الحالة i. وهذا يعني أن الحالة i تكون ارتدادية إذا كان وفقط إذا كان العدد المتوقع لعدد مرات زيارة العملية العشوائية الحالة i يكون عدداً لانهائياً. ومن ثم فإن الحالة i تكون ارتدادية إذا كان وفقط إذا كان:

$$\sum_{n\geq 0} p_{ii}^{(n)} = \infty$$

ومن ناحية أخرى إذا كان $v_{jj} < 1$ فإن الحالة j تكون حالة عابرة. بالبدء من الحالة j فإن احتمال ألاّ تعود العملية العشوائية ثانية إلى هذه الحالة هو $1 - v_{jj}$ والنظرية التالية توضح ذلك:

نظرية (٤,٤)

الحالة $i \in S$ تكون ارتدادية (أي أن $v_{ii} = 1$) إذا كان وفقط إذا كان:

$$\sum_{n\geq 0} p_{ii}^{(n)} = \infty$$

البرهان

باستخدام قانون الاحتمال الكلي الذي ينص على:

$$P(A) = \sum_{k} P(A \mid B_k) P(B_k) \qquad (٤,١)$$

حيث A و B_k عبارة عن الحوادث التالية:

A : العملية ستنتقل من الحالة i إلى الحالة i بعد n من الخطوات.

B_k : العملية ستعود لأول مرة إلى الحالة i بعد k من الخطوات، $0 \leq k \leq n$.

لاحظ أن:

$$P(B_k) = v_{ii}(k) \quad \text{و} \quad P(A) = p_{ii}^{(n)}$$

وللتبسط نأخذ $u_n = p_{ii}^{(n)}$ و $v_k = v_{ii}(k)$ ومن ثَم فإن $P(A \mid B_k) = u_{n-k}$ وباستخدام العلاقة (٤,١) نحصل على:

$$u_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \cdots + u_n v_0 , \quad n \geq 1 \qquad (٤,٢)$$

دعنا الآن نقدم الدالتين التاليتين:

$$V(z) = \sum_{n \geq 0} v_n \, z^n \quad \text{و} \quad U(z) = \sum_{n \geq 0} u_n \, z^n$$

هذه الدوال تكون دوالاً تحليلية لقيم z التي تحقق أن $|z| < 1$. يمكن كتابة العلاقة (٤,٢) على الصورة التالية:

$$U(z) - 1 = U(z) V(z)$$

ولاختبار صحة هذه العلاقة يكفي اختبار أن معاملات المتسلسلتين في طرفي هذه العلاقة تكون متساوية. العلاقة صحيحة عندما $n \geq 1$ وذلك باستخدام العلاقة (٤,٢). كما أنها أيضًا صحيحة إذا كان $n = 0$ والتي تضمن أن $u_0 - 1 = u_0 v_0$ وهي صحيحة عندما $u_0 = 1$ و $v_0 = 0$. ومن ثَم فإن:

$$U(z) = \frac{1}{1 - V(z)} \qquad (٤,٣)$$

والآن نختبر الشرط الضروري والكافي للنظرية. بفرض أن الحالة i ارتدادية، إذن $v_{ii} = 1$، أي أن: $\sum_{n \geq 0} v_n = 1$. لكن $\sum_{n \geq 0} v_n = V(1)$ وباستخدام العلاقة (٤,٣) لدينا $U(1) = \infty$ أي أن: $\sum_{n \geq 0} u_n = \infty$ أو $\sum_{n \geq 0} p_{ii}^{(n)} = \infty$.

الحالة i تكون حالة عابرة إذا كان وفقط إذا كان $\sum_{n \geq 0} p_{ii}^{(n)} < \infty$. وفي الحقيقة يمكن توضيح أنه إذا كانت الحالة j عابرة فإن $\sum_{n \geq 0} p_{ij}^{(n)} < \infty$ لجميع الحالات i، وهذا يعني أنه انطلاقًا من الحالة i فإن العدد المتوقع للانتقالات إلى الحالة j يكون محدوداً (نهائياً). وبالتتابع ينتج أن للحالة العابرة j فإن $\lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)} = 0$.

مثال (٤,٢٠)

يقوم سائق تاكسي بالعمل في ثلاث مدن متجاورة A و B و C. لنفرض أن T_n يرمز إلى المدينة التي يبدأ منها الجولة رقم n. ولنفرض أن مصفوفة احتمالات الانتقال في ساعة واحدة هي:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ P = \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 0.4 & 0.1 & 0.5 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \end{pmatrix} \end{array}$$

يمكن استخدام الطريقة الموضحة في الفصل الثالث لتوضيح أن التوزيع الاحتمالي النهائي لهذه العملية العشوائية هو $\pi = (0.31, 0.25, 0.44)$. ومن ثَم فإن الاحتمالات $p_{ii}^{(n)}$ تتقارب إلى قيم موجبة عندما $n \to \infty$. ويقود ذلك إلى أن $\sum_{n\geq 0} p_{ii}^{(n)} = \infty$ لجميع $i = A, B, C$ ومن ثم فإن جميع المدن A و B و C تكون مدناً ارتدادية.

(٤,٤) الفصول الارتدادية والفصول العابرة

Recurrent and transient classes

سنوضح في هذا البند أن الارتداد recurrence والعبور transience يحققان خواص الفصول، بمعنى أن:

١- إذا كانت الحالة ارتدادية إذن جميع الحالات التي تنتمي إلى فصلها يجب أن تكون أيضًا ارتدادية.

٢- إذا كانت الحالة عابرة فإن جميع الحالات التي تنتمي إلى فصلها يجب أن تكون أيضًا عابرة.

لنفرض أن الحالة i ارتدادية والحالة j ممكنة من الحالة i. وحيث إن الحالة j يمكن الوصول إليها من الحالة i وأن الحالة i ارتدادية إذن في نهاية الأمر فإن العملية العشوائية ستزور الحالة j. ومن الحالة j يجب أن تعود العملية العشوائية إلى الحالة i وذلك لأنها ارتدادية. ومن ثم فإن الحالتين i و j تكونان متصلتين ولذلك فإنهما ينتميان إلى نفس

الفصل. إضافة إلى ذلك فبعد أن تعود العملية العشوائية إلى الحالة i، فإن العملية كلها ستبدأ جولتها من جديد، ولذلك يجب أن تزور مرة ثانية الحالة j، ومن ثَم فإن الحالة j تكون حالة ارتدادية. وهذا يؤدي إلى أن الحالة العابرة لا يمكن الوصول إليها من الحالات الارتدادية وهذا يثبت أن الارتداد يحقق خاصية الفصل.

لاحظ أن جميع الحالات التي تنتمي إلى الفصل المغلق تكون حالات ارتدادية. إذا دخلت العملية العشوائية فصلاً مغلقاً فإنها تبقى هناك إلى مالانهاية. ومن ثَم فإنه بمجرد أن تدخل العملية العشوائية إلى فصل ارتدادي فإنها تبقى هناك و لا تذهب إلى أي فصل آخر.

ومن ناحية أخرى وبفرض أن الحالة العابرة i متصلة مع حالة ما j، وكانت الحالة j ارتدادية إذن من خاصية التماثل وبنفس الأسلوب الذي اتبعناه مسبقًا فإن الحالة i يجب أن تكون ارتدادية وهذا يقود إلى تعارض، ومن ثم فإن الحالة j يجب أن تكون عابرة ولهذا فإن العبور يحقق أيضًا خاصية الفصل.

تعرض النظرية التالية هذه الملاحظات:

نظرية (٤,٥)

١- إذا كانت الحالة i عابرة وأن $i \leftrightarrow j$ إذن الحالة j تكون عابرة.

٢- إذا كانت الحالة i ارتدادية وأن $i \leftrightarrow j$ إذن الحالة j تكون ارتدادية.

البرهان

يكون البرهان بديهيًا إذا كانت $i = j$ ولذلك نفرض أن $i \neq j$.

١- لأي عدد صحيح غير سالب k:

$$p_{jj}^{m+k+n} \geq p_{ji}^{m} p_{ii}^{k} p_{ij}^{n}$$

لذلك:

$$\sum_{k\geq 0} p_{jj}^{(k)} > p_{ji}^{(m)} p_{ij}^{(n)} \sum_{k\geq 0} p_{ii}^{(k)}$$

ومن ثَم:

$$\sum_{k\geq 0} p_{jj}^{(k)} < \infty \Rightarrow \sum_{k\geq 0} p_{ii}^{(k)} < \infty$$

وبعكس i مع j في البرهان (حيث إن الاتصال علاقة متماثلة) يعطي استنتاجاً عكسياً.

٢- من المتباينة التي حصلنا عليها في الفقرة (١) نستنتج أن:

$$\sum_{k\geq 0} p_{jj}^{(k)} = \infty \;\Rightarrow\; \sum_{k\geq 0} p_{ii}^{(k)} = \infty$$

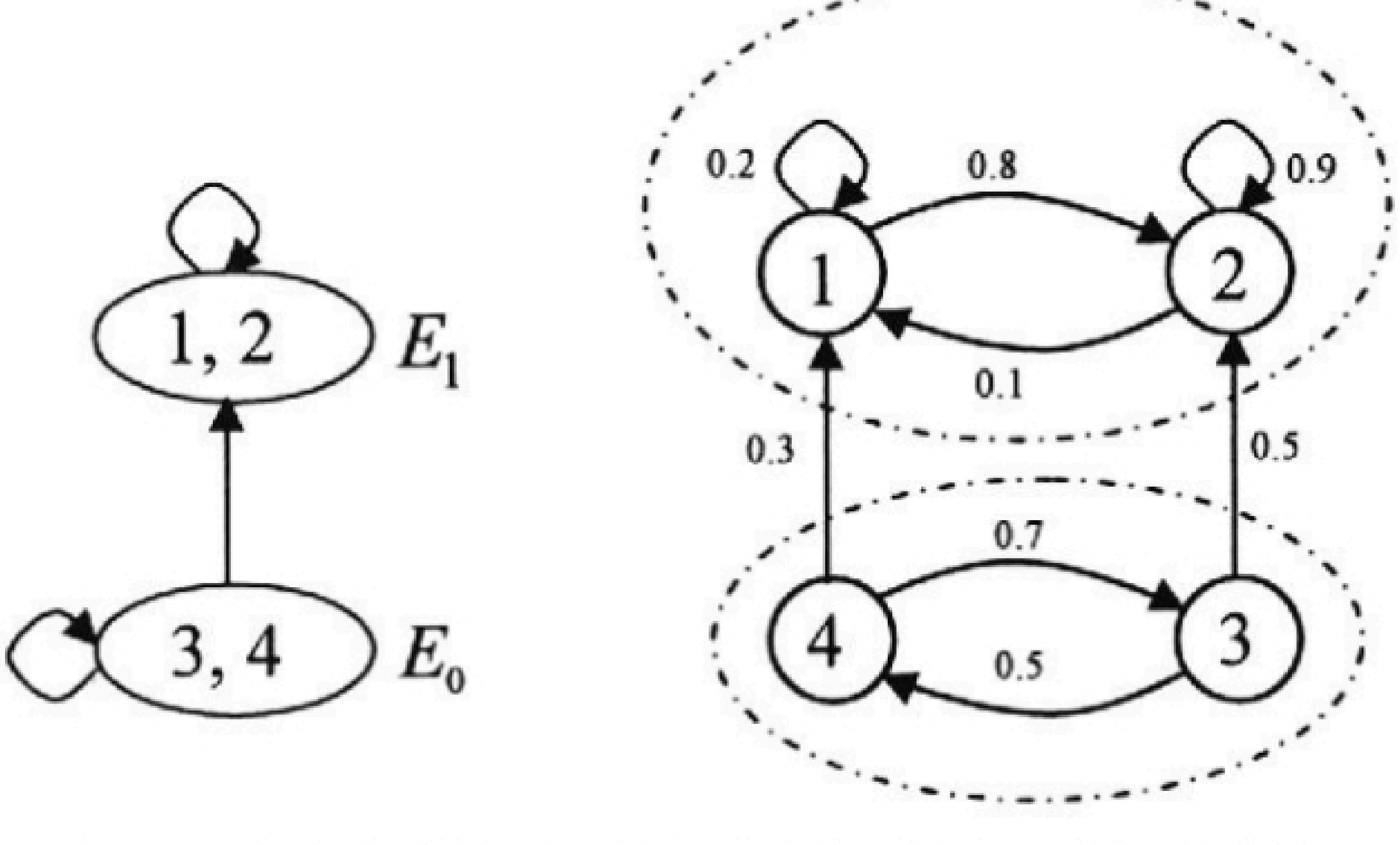
نحصل على استنتاج عكسي بتبديل i مع j .

مثال (٤,٢١)

لنفرض أن سلسلة ماركوف مصفوفة احتمال الانتقالات التالية:

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.3 & 0 & 0.7 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

بمجرد أن تزور العملية العشوائية الحالة 1 أو الحالة 2 فإنها ستدور بين هاتين الحالتين إلى الأبد. ومن ثَم فإن الحالتين 1 و 2 تكونان فصلاً ارتدادياً. إذا انطلقت السلسلة من الحالة 3 فإنها يمكن أن تنتقل إلى الحالة 2 باحتمال 0.5 وحيث إن الحالة 2 تنتمي إلى فصل ارتدادي مغلق، إذن لن تعود السلسلة ثانية إلى الحالة 3 ومن ثم فإن الحالة 3 تكون حالة عابرة. وحيث إن $p_{43} = 0.7$ و $p_{34} = 0.5$ إذن الحالتان 3 و 4 تكونان متصلتين ومن ثَم فإنهما تنتميان إلى نفس الفصل. لنرمز بالرمز E_0 إلى فصل الحالات العابرة وبالرمز E_1 إلى فصل الحالات الارتدادية كما هو موضح بالشكل (٤,١٢).



شكل (٤,١٢): الرسم البياني المناظر لسلسلة ماركوف في المثال (٤,٢١).

مثال (٤,٢٢)

لنفرض سلسلة ماركوف $\{S_n\}$ حيث إن S_n عدد مرات النجاح خلال أول عدد n من محاولات برنوللي (انظر المثال (٢,٣) ومثال (٢,١٩)). لدينا لأي j يكون $j \to j+1$ ولكن العكس غير صحيح، ومن ثَم فإن الحالة j لن تكون حالة ارتدادية ومن ثم فإن جميع حالات هذه السلسلة تكون عابرة.

مثال (٤,٢٣)

لنفرض أن سلسلة ماركوف $\{X_n\}$ حيث إن X_n زمن الحياة المتبقي لمُعَدَّة ما في الاستخدام في المرة n (انظر مثال (٢,٢٦)). نلاحظ لأي $j \in S$ فإن $j \to 0$ في خطوة واحدة وذلك لأنه عندما تتعطل الوحدة في الاستعمال يتم استبدالها مباشرة بوحدة جديدة مماثلة. كما أن لدينا $0 \to 1 \to 2 \to \cdots \to j-2 \to j-1 \to j$ والذي يضمن أن $j \to 0$، ومن ثم فإن $j \leftrightarrow 0$، وحيث إن الحالة j اختيارية إذن جميع الحالات متصلة مع بعضها ومن ثم فإن السلسة تكون غير مختزلة. ومن ناحية أخرى نجد أن $v_{00}(1) = p_{00} = p_1$، $v_{00}(2) = p_{01}\,p_{10} = p_2$، ....، $v_{00}(3) = p_{02}\,p_{21}\,p_{10} = p_3$، لأي $n \geq 1$ فإن $v_{00}(n) = p_{0,n-1}\,p_{n-1,,-2}\cdots p_{10} = p_n$، ومن ثَم $v_{00} = \sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$ ومن ثم فإن الحالة 0 تكون ارتدادية وهذا يقود إلى أن جميع الحالات تكون ارتدادية.

نظرية (٤,٦)

إذا كانت $\{X_n\}$ سلسلة ماركوف مغلقة ومحدودة وغير مختزلة إذن جميع حالاتها تكون ارتدادية.

البرهان

لأي حالة $i \in S$ ولجميع القيم $n \geq 1$ فإن:

$$\sum_{j\in S} p_{ij}^{(n)} = 1 \qquad (٤,٤)$$

لنفرض أن $\{X_n\}$ ليست فصلاً ارتدادياً، إذن وكما ذكرنا في نهاية برهان النظرية (٤,٤)

$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$ لكل $i, j \in S$. بأخذ نهاية في العلاقة (٤,٤) عندما $n \to \infty$ ينتج أن

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j\in S} p_{ij}^{(n)} = \sum_{j\in S} \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$$

إن تبديل النهاية مع المجموع ممكن بسبب أن S محدودة. ومن ناحية أخرى $\lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0$ ومن ثَم فإن الفرضية التي بدأنا بها خاطئة ومن ثم فإن $\{X_n\}$ فصل ارتدادي.

في الحقيقية سنقدم في النظرية (٤,٨) نتيجة في غاية الأهمية حول سلاسل ماركوف المنتهية وغير المختزلة.

مثال (٤,٢٤):

لنفرض وجود سلسلة ماركوف بمصفوفة احتمال الانتقالات التالية:

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

جميع حالات هذه السلسلة تكون متصلة مع بعضها ومن ثَم فإن هذه السلسلة تكون غير مختزلة. علاوة على ذلك عدد حالاتها محدود ومن ثَم فإن جميع حالات هذه السلسلة تكون ارتدادية.

مثال (٤,٢٥)

صنف حالات سلسلة ماركوف المدروسة في المثال (٤,٧) من حيث الارتدادية أو العابرة.

الحل

ذكرنا سلفًا أن سلسلة ماركوف في هذا المثال لها أربع فصول: $\{1 ،2\}$، $\{3\}$، $\{4\}$، $\{5\}$.

١- الحالة 3 تكون حالة ماصة ومن ثم فإنها حالة ارتدادية.

٢- الحالتان 1 و 2 تكونان متصلتين ببعضهما. تكون هاتان الحالتان سلسلة ماركوف جزئية غير مختزلة، ومن ثَم فإن الحالتين 1 و 2 تكونان ارتداديتين.

٣- تنتقل السلسلة من الحالة 4 إلى الحالة 3 في خطوة واحدة باحتمال $\frac{1}{6}$. فمجرد أن تدخل السلسلة إلى الحالة 3 فإنها ستبقى هناك ومن ثَم فإن الحالة 4 تكون عابرة.

٤- الحالة 5 تقود إلى الحالة 1 ومن ثم إلى الحالة 2. فبمجرد أن تترك السلسلة الحالة 5 فإنها لن تعود إليها ثانية وهذا يقود إلى أن الحالة 5 حالة عابرة.

كما سنرى في الفقرة التالية أننا نحتاج إلى تصنيف أكبر لحالات سلاسل ماركوف. رأينا أن الحالة i تكون عابرة إذا كان وفقط إذا كان $v_{ii} < 1$ وخلاف ذلك تكون ارتدادية. والآن إذا كان i ارتدادية إذاً فإنه من المؤكد أن تعود السلسلة إلى i بعد عدد محدود من الانتقالات، وعدد غير منتهٍ من المرات على الفترة $[0,\infty)$. وبمعنى عام نحتاج أحياناً إلى معرفة عدد الانتقالات اللازمة للسلسلة حتى تعود إلى i مرة ثانية. ليكن μ_i يرمز إلى العدد المتوقع لانتقالات السلسلة حتى تعود إلى الحالة i، لذا فإن:

$$\mu_i = \sum_{n\geq 1} n v_{ii}(n)$$

يسمى العدد μ_i بزمن الارتداد للحالة i. بعد البدء في الحالة i إذن فإنه في المتوسط ستعود السلسلة إلى الحالة i مرة كل μ_i وحدة زمنية (عدد من الانتقالات). ومن الممكن أن يكون $\mu_i = \infty$ أو $\mu_i < \infty$، ومن ثَم فإننا نفرق بين أي حالتين ارتداديتين كما في التعريف التالي:

تعريف (٤,١١)

تسمى الحالة الارتدادية i بأنها:

١- موجبة الارتداد **positive recurrent** إذا كان $\mu_i < \infty$.

٢- صفرية الارتداد **recurrent null** إذا كان $\mu_i = \infty$.

مثال (٤,٢٦)

بالعودة ثانية إلى المثال (٤,١٨)، أثبتنا أن الحالة 1 تكون حالة ارتدادية، والآن نريد

توضيح ما إذا كانت هذه الحالة موجبة أم صفرية الارتداد. لدينا:

$$\mu_1 = \sum_{n=1}^{\infty} n\, v_{11}(n)$$
$$= 1-\alpha+\alpha^2 \sum_{n=2}^{\infty} n(1-\alpha)^{n-2}$$

ولكن:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(1-\alpha)^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty}(n-1+1)(1-\alpha)^{n-2}$$
$$\sum_{n=2}^{\infty} n(1-\alpha)^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)(1-\alpha)^{n-2} + \sum_{n=2}^{\infty}(1-\alpha)^{n-2}$$
$$= \frac{1}{[1-(1-\alpha)]^2} + \frac{1}{[1-(1-\alpha)]}$$
$$= \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha} = \frac{\alpha+1}{\alpha^2}$$

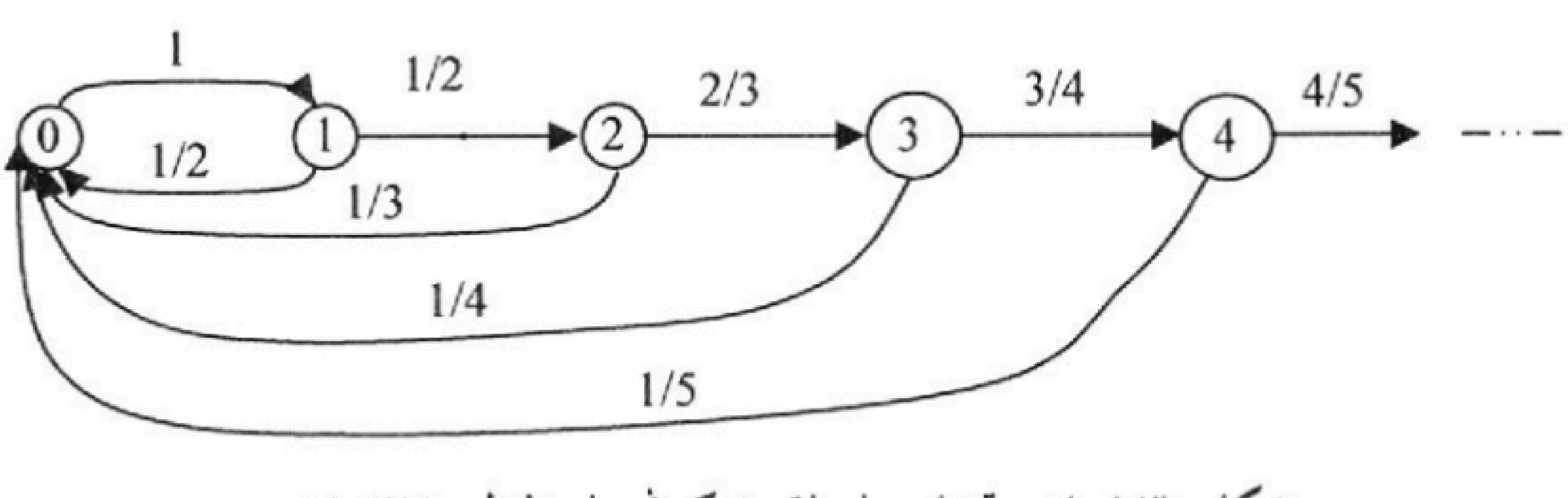
إذن:

$$\mu_1 = 1-\alpha+\alpha^2\left(\frac{\alpha+1}{\alpha^2}\right) = 2$$

ومن ثَم فإن الحالة 1 تكون موجبة الارتداد، وهذا يعني أنه يتوقع أن السلسلة تعود إلى الحالة 1 كل انتقالين.

مثال (٤,٢٧)

دعنا في هذا المثال نثبت أن الحالة 0 في سلسلة ماركوف الممثلة بالشكل (٤,١٣) تكون صفرية الارتداد.



شكل (٤,١٣): تمثيل سلسلة ماركوف في المثال (٤,٢٧).

لدينا:

$$v_{00}(n)=\begin{cases}0, & n=1,\\ \frac{1}{n(n-1)} & n\geq 2.\end{cases}$$

ومن ثم فإن:

$$\begin{aligned}v_{00} &=\sum_{n=1}^{\infty}v_{00}(n)\\ &=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}\\ &=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

$$v_{00}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\right)=1$$

ومن ثَم فإن الحالة 0 تكون ارتدادية وبالإضافة إلى ذلك لدينا:

$$\mu_0=\sum_{n=1}^{\infty}nv_{00}(n)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}=\infty$$

إذن الحالة 0 تكون صفرية الارتداد.

مثال (٤,٢٨)

أوضحنا في المثال (٤,٢٥) أن الحالة 1 تكون حالة ارتدادية، والآن نريد توضيح أنها موجبة الارتداد. باستخدام الطريقة المتبعة في المثال (٤,١٩) والرسم البياني للسلسلة الموضح في الشكل (٤,٦)، يمكن وبسهولة أن نرى أن:

$$v_{11}(n)=\begin{cases}p_{11}, & n=1,\\ p_{12}\,p_{22}^{n-2}\,p_{21} & n=2,3,\cdots.\end{cases}$$

أي أن:

$$v_{11}=p_{11}+p_{12}\,p_{21}\sum_{n=2}^{\infty}p_{22}^{n-2}$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

$$=\frac{1}{3}\left[1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right]=1$$

ومن ثَم فإن الحالة 1 تكون حالة ارتدادية. ولبيان ما إذا كانت موجبة أم صفرية الارتداد نحسب μ_1 :

$$\mu_1=\sum_{n=1}^{\infty}n\,v_{11}(n)$$

$$=p_{11}+p_{12}\cdot p_{21}\sum_{n=2}^{\infty}n\,p_{22}^{n-2}$$

ولكن:

$$\sum_{n=2}^{\infty}n\,p_{22}^{n-2}=\sum_{n=2}^{\infty}(n-1+1)\,p_{22}^{n-2}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}n\,p_{22}^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}p_{22}^{n}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}n\,p_{22}^{n-2}=\frac{1}{(1-p_{22})^2}+\frac{1}{1-p_{22}}$$

$$=\frac{p_{22}}{(1-p_{22})^2}$$

ومن ثَم فإن:

$$\mu_1=p_{11}+\frac{p_{12}\cdot p_{21}\cdot p_{22}}{(1-p_{22})^2}=2.33$$

ومن ثم فإن الحالة 1 تكون موجبة الارتداد.

مثال (٤,٢٩)

لنفرض أن سلسلة ماركوف $\{X_n\}$ حيث إن X_n زمن الحياة المتبقي لمُعَدَّة ما في الاستخدام في المرة n (انظر مثال (٢,٢٦)). لقد أوضحنا في مثال (٤,٢٣) أن جميع حالات

هذه السلسلة ارتدادية. والآن إذا كان متوسط زمن الحياة $\sum_j j\,p_j = \infty$ ، فإن الحالة 0 تكون صفرية الارتداد ومن ثم فإن جميع الحالات تكون صفرية الارتداد. وإذا كان $\sum_j j\,p_j < \infty$ فإن الحالة 0 تكون موجبة الارتداد ومن ثم فإن جميع الحالات تكون موجبة الارتداد.

أوضحنا سلفًا أن كلاً من الحالات الارتدادية والحالات العابرة تحقق خواص الفصل. توضح النظرية التالية أن كلاً من الحالات موجبة الارتداد والحالات صفرية الارتداد تحقق أيضًا خواص الفصل.

نظرية (٤,٧)

ليكن $C \subset S$ فصل تكافؤ ارتدادي **recurrent equivalence class** ، إذن جميع حالات C تكون إما موجبة الارتداد أو صفرية الارتداد.

البرهان

ليكن $i, j \in C$ ولنفرض أن الحالة i صفرية الارتداد، إذن، وكما سنوضح في الفصل الخامس – نظرية (٥,٢)، $\lim_{k\to\infty} p_{ii}^{k} = 0$. والآن لأي عدد صحيح غير سالب k فإن:

$$p_{ii}^{m+k+n} \geq p_{ij}^{m}\ p_{jj}^{k}\ p_{ji}^{n}$$

وأيضًا $\lim_{k\to\infty} p_{jj}^{k} = 0$. وحيث إن الحالة j ارتدادية وهذا يمكن أن يحدث فقط إذا كانت الحالة j صفرية الارتداد (باستخدام نظرية (٥,٢)). وبتبديل i و j يمكن أن نثبت العكس إذا كانت j صفرية الارتداد فإن i تكون أيضًا صفرية الارتداد. يمكن عمل نفس البرهان للحالة موجبة الارتداد.

نظرية (٤,٨)

إذا كان $C \subset S$ فصل غير مختزل مغلق **irreducible closed class** بحالات عديدة منتهية، إذن C يكون موجب الارتداد.

البرهان

مثل برهان النظرية (٤,٧).

مثال (٤,٣٠)

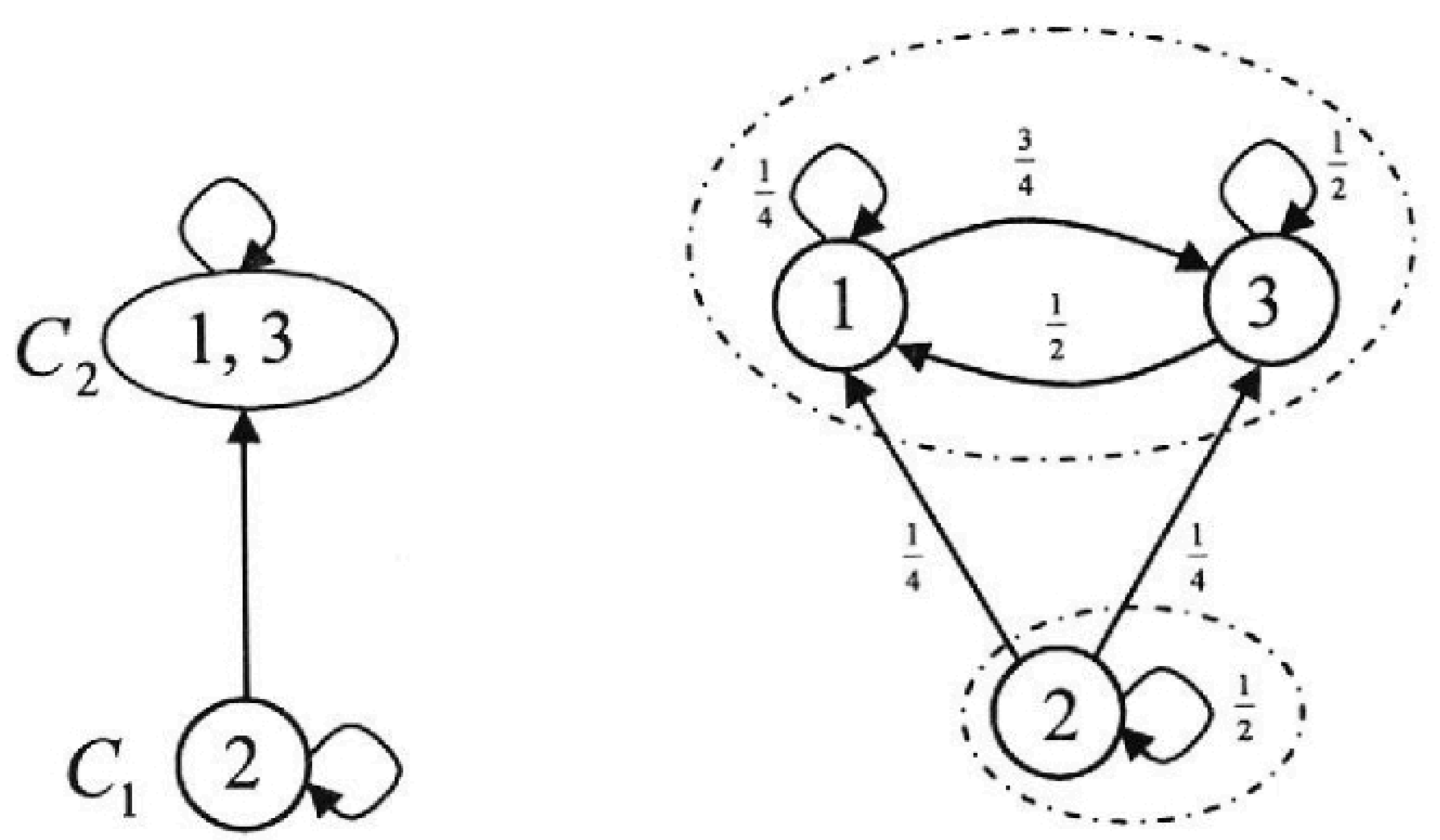
لنفرض أن سلسلة ماركوف بمصفوفة احتمال الانتقالات التالية.

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{array}$$

من الشكل (٤,١٤) يمكن ملاحظة أن الفصل $C_1 = \{2\}$ يكون مفتوحاً، بينما $C_2 = \{1,3\}$ مغلق ومنتهٍ. ومن ثَم فإن C_1 يكون فصلاً عابراً أما C_2 فيكون فصلاً موجب الارتداد.

ملاحظة (٤,١)

الحالة المفتوحة $\{j\}$ يمكن أن تكون فقط عابرة، ويحدث ذلك بسبب إمكانية ترك الحالة المفتوحة (أو الفصل المفتوح) إلى حالة مغلقة (أو فصل مغلق) و أن احتمال ألاّ تعود أبدًا إلى هذه الحالة مرة ثانية يساوي 1 ومن ثم فإن $v_{jj} < 1$. ومن ثَم فإن الفصل المغلق فقط يمكن أن يكون فصلاً ارتدادياً. كما يمكن ملاحظة أن الفصول المغلقة (إن لم تكن محدودة) يمكن أن تكون عابرة.



شكل (٤,١٤): الرسم البياني والرسم البياني المختزل لسلسلة ماركوف في المثال (٤,٣٠).

مثال (٤,٣١)

لنفرض أن $\{X_n\}$ سلسلة متجانسة لماركوف بفضاء الحالة $S = \{1,2,3,4,5\}$ ومصفوفة احتمال الانتقالات التالية:

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0 & 0.3 & 0.5 \\ 0.3 & 0 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

١- أوجد رسمًا بيانيًا ورسمًا بيانيًا مختزلاً لسلسلة ماركوف $\{X_n\}$.

٢- صنف حالات السلسلة $\{X_n\}$.

الحل:

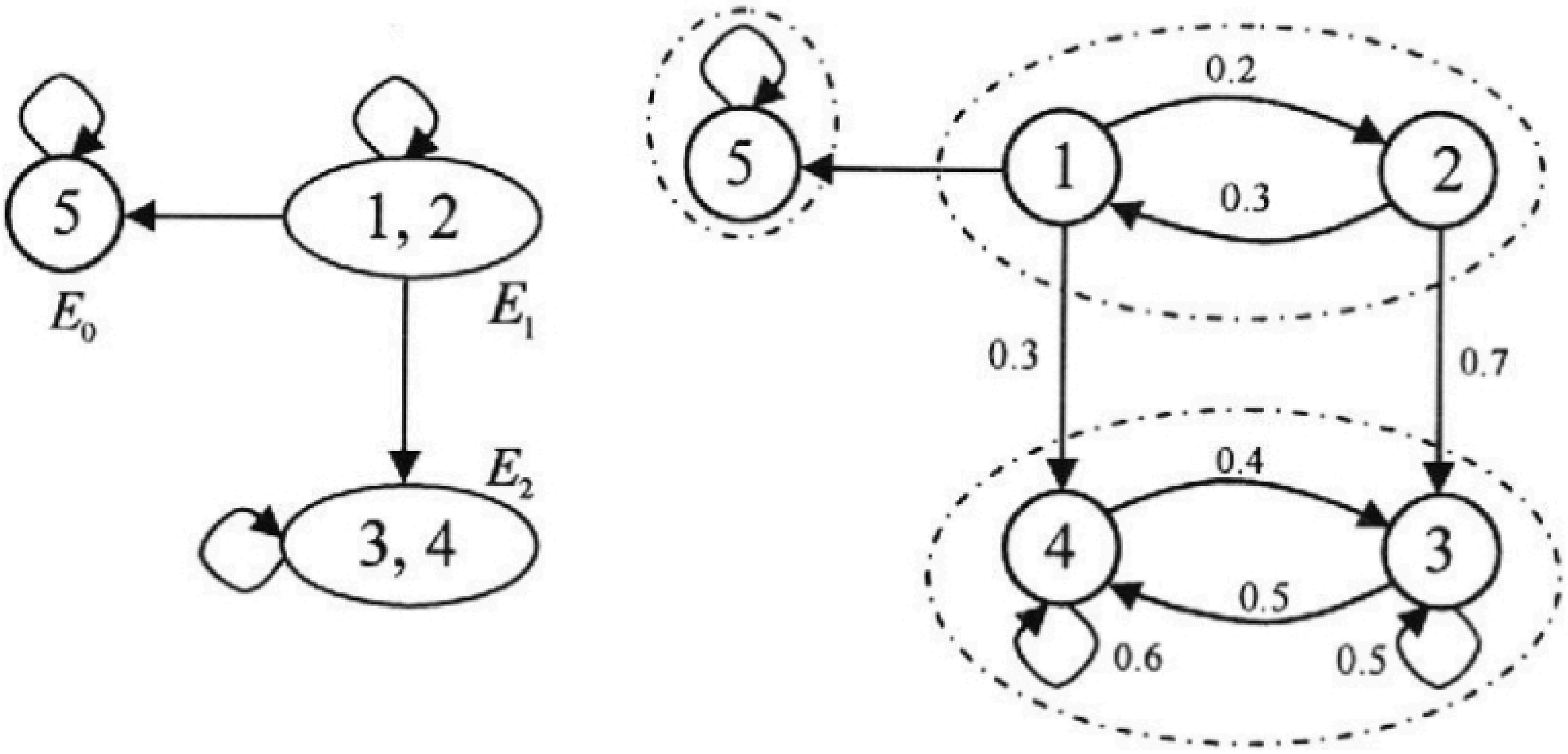
١- الشكل (٤,١٤) يعطي رسمًا بيانيًا ورسمًا بيانيًا مختزلاً لسلسلة ماركوف $\{X_n\}$.

٢- يوجد 3 فصول: $S = E_0 + E_1 + E_2$ حيث:

(أ) $E_0 = \{5\}$ فصل مغلق ومنتهٍ إذن فهو فصل موجب الارتداد (ماص).

(ب) $E_1 = \{1,2\}$ فصل مفتوح إذن فهو فصل عابر.

(ج) $E_2 = \{3,4\}$ فصل مغلق منتهٍ إذن فهو فصل موجب الارتداد.



شكل (٤,١٥): الرسم البياني والرسم البياني المختزل لسلسلة ماركوف في المثال (٤,٣١).

ومن ثَم فإنه في الحالات التي يوجد فيها حالات عديدة منتهية يكــون لــدينا جميــع الأدوات اللازمة لتصنيف الحالات. وكملخص لما سبق نبدأ بتعريف (بتحديــد) المجموعــات المغلقة وغير المختزلة، ومنها فإن جميع الحالات التي تنتمي إلى أي مجموعة مغلقة وغير مختزلــة تكون موجبة الارتداد، والحالات المتبقية، إذا كان هناك حالات متبقية، تكون حالات عابرة. سنعرض في البند (٤,٦) خوارزمية وبرنامج Matlab لتقسيم فضاء الحالة إلى فصول متصلة. في الحالات التي فيها عدد حالات العملية العشوائية يكون غير منتهٍ فإنه من الممكن أن تحتوي العملية العشوائية على مجموعات مغلقة غير قابلة للاختزال بعدد حالات غير منتهٍ كل منــها تكون إما عابرة أو صفرية الارتداد. يوجد عدد قليل من النظريات للتمييز بين هاتين الحالتين ولكن هذه النظريات تكون خارج نطاق هذا الكتاب.

(٤,٥) سلاسل ماركوف الدورية

Periodic Markov chains

سنقدم اصطلاح الدورية periodicity من خلال المثال التالي:

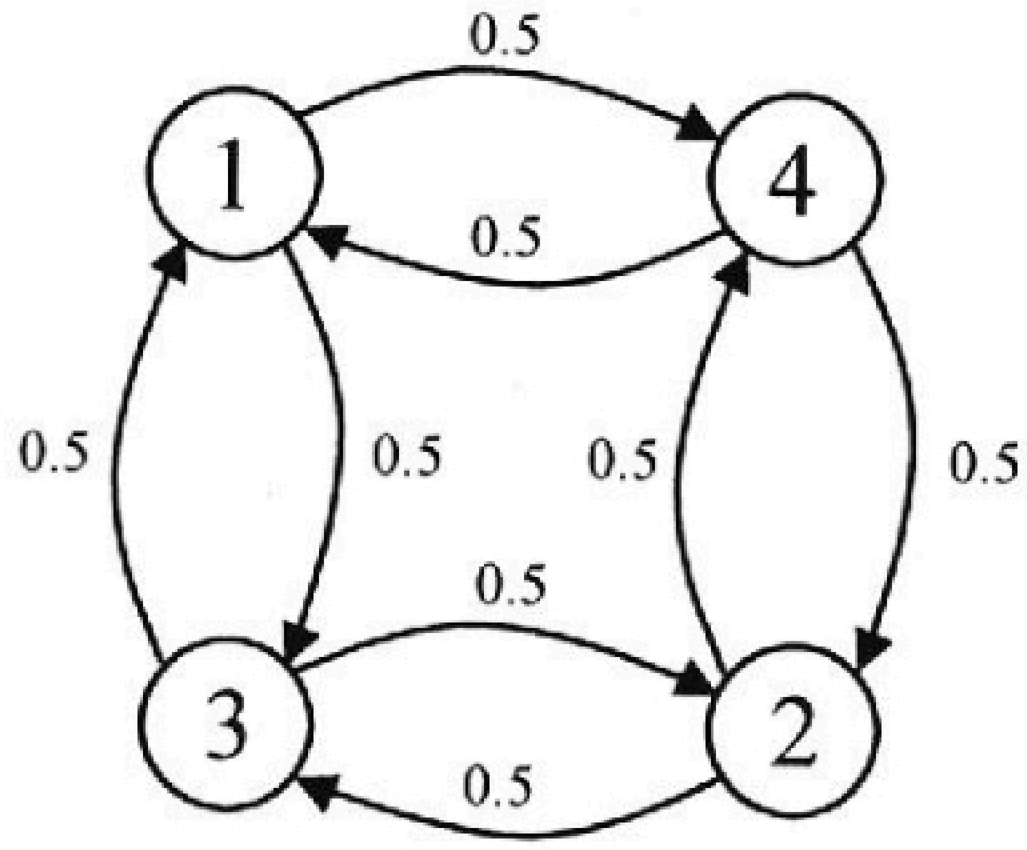
مثال (٤,٣٢)

لنفرض أن $\{X_n\}$ سلسلة ماركوف بفضاء الحالة $S=\{1,2,3,4\}$ ومصفوفة احتمال الانتقالات التالية:

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

يوضح الشكل (٤,١٦) الرسم البياني لهذه السلسلة. لا يمكن للنظام أن ينتقل من الحالة 1 إلى الحالة 2 أو من الحالة 2 إلى الحالة 1 في خطوة واحدة. وبالمثل النظام لا ينتقل من الحالة 3 إلى الحالة 4 أو من الحالة 4 إلى الحالة 3 في خطوة واحدة. يمكن تقسيم فضاء الحالة إلى فــصلين جزئيين $C_1=\{1,2\}$ و $C_2=\{3,4\}$ ويمكن أن تنتقل العملية العشوائية من فصل جزئي إلى

الآخر. تسمى هذه السلسلة بالسلسلة الدورية periodic chain بدورة periodicity $d = 2$.



شكل (٤,١٦): الرسم البياني لسلسلة ماركوف في المثال (٤,٢٣).

(٤,٥,١) الحالات الدورية

دعنا الآن نقدم تعريف دورة الحالة periodicity of the state

تعريف (٤,١٢)

الحالة i تكون حالة دورية periodic بدورة $d = d(i)$ إذا كان:

$$p_{ii}^{(md)} > 0, \quad (m = 1,2,\cdots) \text{ and } p_{ii}^{(n)} = 0 \quad (n \neq md)$$

هذا التعريف يعني أنه يمكن لسلسلة ماركوف أن تعود إلى حالتها الراهنة i فقط عند الأوقات $d, 2d, 3d, \cdots$. ومن الناحية الأخرى فإن الحالة i لها دورة d إذا كان وفقط إذا كانت d هي أصغر عدد صحيح يحقق أن $p_{ii}^{(n)} = 0$ عندما d لا تقسم n. ومن ثَم فإن دورة الحالة i تكون أصغر قاسم مشترك لجميع الأعداد الصحيحة $n \geq 1$ والتي تحقق $p_{ii}^{(n)} > 0$ (مع ملاحظة أنه إذا كان $p_{ii}^{(n)} = 0$ لكل عدد صحيح $n \geq 1$ فإن $d = 1$).

تعريف (٤,١٣)

إذا كان $d(i) = 1$ فإن الحالة i تكون غير دورية aperiodic.

إذا كان $p_{ii} > 0$ لبعض الحالات المنفردة i إذن الحالة لا تكون دورية وذلك لأن النظام

يمكن أن يظل في هذه الحالة لأي فترة زمنية.

مثال (٤,٣٣)

لنفرض أن $\{X_n\}$ سلسلة ماركوف بفضاء حالة محدود من m حالة ومصفوفة احتمال الانتقالات التالية:

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m-1 \\ m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & m \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

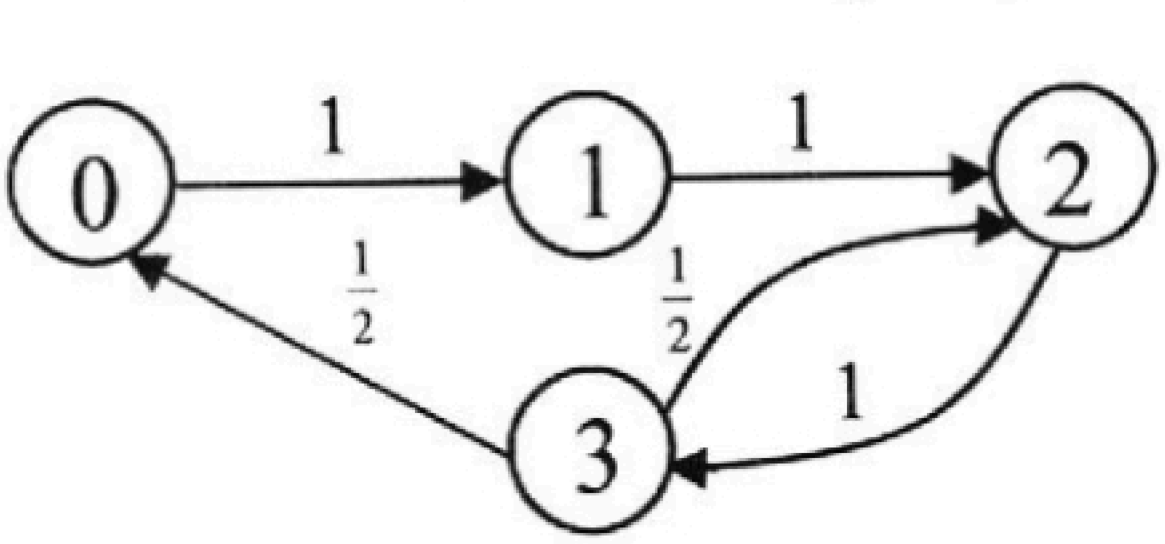
كل حالة من حالات هذه السلسلة تكون دورية بدورة m.

مثال (٤,٣٤)

لنفرض سلسلة ماركوف بمصفوفة احتمال الانتقالات التالية:

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

يوضح الشكل (٤,١٧) الرسم البياني لهذه السلسلة.



شكل (٤,١٧): الرسم البياني لسلسلة ماركوف في المثال (٤,٣٤).

يمكن استخدام الرسم البياني في الشكل (٤,١٧)، للتحقق وبسهولة من أن $p_{00} = 0$ ،

$p_{00}^{(2)}=0$ ، $p_{00}^{(3)}=0$ ، $p_{00}^{(4)}=\frac{1}{2}$ ، $p_{00}^{(5)}=0$ ، $p_{00}^{(6)}=\frac{1}{4}$ ، وبشكل عام:

$$p_{00}^{(n)}=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1}, & n=4,6,8,\cdots\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

وهذا يقود إلى أن مجموعة الأعداد الصحيحة التي تحقق أن $p_{00}^{(n)}>0$ هي $\{4,6,8,\cdots\}$ ، ومن ثَم فإن دورة الحالة 0 تكون دورية بدورة $d(0)=2$.

مثال (٤,٣٥)

لنفرض أن سلسلة ماركوف بمصفوفة احتمال الانتقالات التالية:

$$P=\begin{array}{c}\\ A\\ B\\ C\\ D\\ E\\ F\\ G\end{array}\begin{array}{c}\begin{matrix}A & B & C & D & E & F & G\end{matrix}\\ \begin{pmatrix}0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\end{array}$$

لنفرض أن هذه السلسة في الحالة A عند الخطوة 0. في الخطوة 1 يجب أن تنتقل العملية العشوائية إلى إحدى الحالات C ، D ، E ولن تعود إلى الحالة A . وفي الخطوة 2 يجب أن تزور العملية العشوائية إحدى الحالتين F ، G ولن تعود إلى الحالة A . وفي الخطوة 3 يمكن أن تعود العملية العشوائية إلى الحالة A (بالرغم من أنها يمكن أن تذهب إلى الحالة B بدلاً من الحالة A). بالاستمرار فإن العملية العشوائية لن تعود إلى الحالة A عند الخطوات 4، 5، 7، 8، ... ولكنها يمكن أن تعود إلى هذه الحالة فقط عند الخطوات 6، 9، 12، ... و من ثم فإن الحالة A تكون دورية بدورة قدرها $d=3$.

مثال (٤,٣٦)

في نموذج المشي العشوائي بحواجز المقدم في المثال (٢,١٦)، وبالاستعانة بالشكل

(٤,٥) يمكن التحقق من أن كل حالة من الحالات العابرة 1، 2، ...، $c-1$ تكون حالة دورية بدورة قدرها $d=2$، وذلك لأنه لأي $i \in \{1,2,\cdots,c-1\}$ فإن:

$$p_{ii}^{(2m)} = \begin{cases} (pq)^m, & m = 1,2,3,\cdots \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

لاحظ أن الحالة الدورية بدورة $d > 0$ يمكن أن تكون إما عابرة وإما ارتدادية. ويمكن أن تكون دورية لأنه إذا رجعت العملية العشوائية إليها فإنها يمكن أن تنتقل بعد ذلك md مرة، ويجب ألاّ تعود عند هذه الانتقالات إلى هذه الحالة.

تمرين (٤,١)

لنفرض سلسلة ماركوف بمصفوفة احتمال الانتقالات التالية:

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

١- صنف الحالات كارتدادية أو عابرة.

٢- وضح أن هذه السلسلة تكون دورية وأوجد دورتها.

تمرين (٤,٢)

أوجد فصول ودورة كل حالة من حالات سلاسل ماركوف بمصفوفات احتمال الانتقالات التالية:

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \end{array} \quad , \quad P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

(٤,٥,٢) الفصول الدورية

خاصية الدورية تحقق أيضًا خاصية الفصل، بمعنى أنه إذا كانت الحالة $i \in C_1 \subset S$ دورية إذن جميع الحالات التي تنتمي إلى الفصل C_1 تكون أيضًا دورية بنفس الدورة.

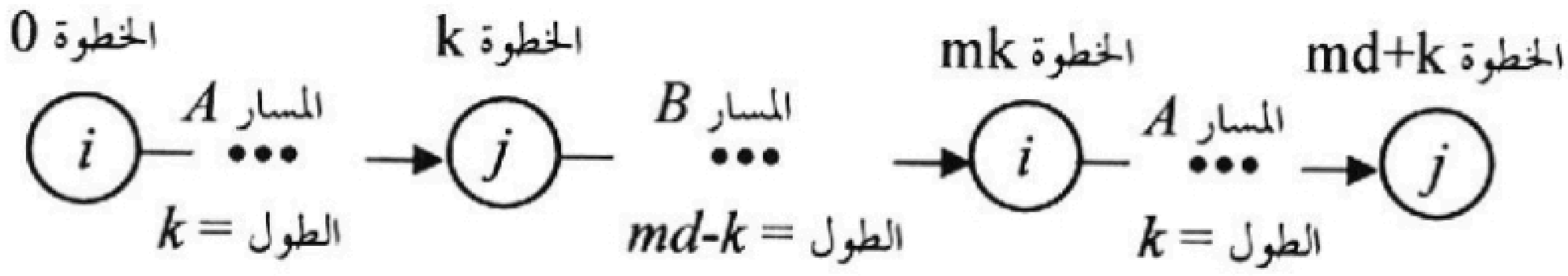
نظرية (٤,٩)

إذا كان $j \leftrightarrow i$ إذن i و j يكون لهما نفس الدورة.

البرهان

لبرهان هذه النظرية دعنا نفرض أن سلسلة ماركوف $\{X_n\}$ لهـــا حالتـــان i و j مختلفتان متصلتان مع بعضهما ومن ثَم فإنهما ينتميان إلى نفس الفصل. وبدون فقــد العمــوم نفرض $X_0 = i$. يجب أن يوجد مسار A يبدأ باحتمال ما من الحالة i عند اللحظــة 0 وينتهي عند الحالة j عند خطوة معينة k. كما يجب أن يوجد مسار B لا يوجد احتمال يبدأ به من الحالة j عند الخطوة k وينتهي بالحالة i عند خطوة معينة $l > k$.

المسار الموحد $(A-B)$ والذي يتكون من المسار A والمتبوع مباشرة بالمــسار B، يكون عبارة عن عروة تبدأ من الحالة i. إذا كانت الحالة i دورية بــدورة d وحيــث إن العروة $(A-B)$ لها احتمال غير صفري إذن فإن طولها l يجب أن يحقق أن $l = md$ لبعض القيم الصحيحة m، وطول المسار B يجب أن يكون $md-k$، انظر الشكل (٤,١٨).



شكل (٤,١٨): الحالة j ممكنة من الحالة i.

والآن لنفرض أن المسار الموحد $(B-A)$ والذي يتكون من المسار B والمتبــوع مباشــرة بالمسار A، يكون عبارة عن عروة تبدأ من الحالة j ولها احتمال غير صفري وطولها يحقق أن $(md-k)+k = md$. ومن ثَم فإنه إذا كانت الحالة j دورية بطول e، إذن e تقــسم d.

ومن التماثل نحصل على $d = e$، أي أن دورة الحالة j يجب أن تكون نفس دورة الحالة i.

مثال (٤,٣٨)

لنفرض أن سلسلة ماركوف $\{X_n\}$ حيث إن X_n عبارة عن زمن الحياة المتبقي لمركبة ما في الاستخدام رقم n (انظر مثال (٢,٢٦)). أثبتنا في المثال (٤,٢٣) أن السلسلة غير مختزلة. وحيث إن $p_{00} = p_1 > 0$ إذن الحالة 0 تكون غير دورية ومن ثَم فإن جميع الحالات تكون غير دورية.

مثال (٤,٣٩)

يمكن لنتيجة مقابلة مع محامٍ أن تكون واحدة من الحالات العشر التالية: I، T_1، T_2، T_3، T_4، C_1، C_2، C_3، C_4، T_e. السلسلة تكون في الحالة C_i ($i = 1,2,3,4$) إذا تحدث المحامي، وفي الحالة T_i ($i = 1,2,3,4$) إذا تحدث الزبون. بناء على دراسة تجريبية على هذا المثال، أمكن الحصول علي مصفوفة احتمال الانتقالات التجريبية في الصورة التالية:

$$P = \begin{array}{c} \\ T_e \\ T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ I \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} T_e & T_1 & T_2 & T_3 & T_4 & C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & I \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ .02 & 0 & 0 & 0 & 0 & .23 & .48 & .24 & .03 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .19 & .62 & .15 & .04 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .05 & .84 & 0 & .1 & 0 \\ 0 & 0 & .5 & .42 & .08 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .03 & .45 & .33 & .19 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .5 & .5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .66 & .17 & .17 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

تحدث الخطوة عندما تتحول المحادثة من المحامي إلى الزبون. يترك للقارئ التحقق من وجود ثلاثة فصول لهذه السلسلة وهي:

١- $K_T = \{T_e\}$ ارتدادي (ماص).

٢- $K_I = \{I\}$ عابر.

٣- $K_2 = \{T_1, T_2, T_3, T_4, C_1, C_2, C_3, C_4\}$ عابر ودوري بدورة 2.

(٤,٦) السلاسل الماصة
Absorbing chains

من بين التغيرات العديدة يوجد ثلاثة أنواع من سلاسل ماركوف التي نهتم بها في هذا الكتاب وهي: السلاسل المسرانية **ergodic chains** والسلاسل الدورية **periodic chains** والسلاسل الماصة **absorbing chains**. في السلسلة المسرانية إذا كانت السلسلة في حالة ما فإنها يمكن أن تصل إلى أي حالة أخرى إذا كانت السلسلة محدودة المعلمة وأن الاحتمال النهائي لكل حالة موجود. وفي الفصل التالي سوف نقدم الكثير حول السلسلة المسرانية. في السلسلة الدورية لا يتم العودة إلى نفس الحالة إلا بعد عدد من الانتقالات تكون عبارة عن أحد مضاعفات عدد ثابت، أي أن العودة إلى نفس الحالة يكون بعد عدد من الانتقالات مساويًا لأحد الأعداد d، $2d$، ... حيث إن d عبارة عن عدد صحيح موجب. وفي هذه الحالة لا توجد احتمالات نهائية، أي أن التوزيع المستقر يكون غير موجود.

بعد تعريف الخواص المختلفة والمميزة لحالات السلسلة، يمكننا الآن مناقشة كيفية تقسيم فضاء الحالات إلى فصول تكافؤ بحيث إن الحالات المنتمية إلى نفس الفصل تتميز بنفس الخواص. لأجل $i \in S$ دعنا نفرض أن $C(i)$ يشير إلى الفصل الذي يحتوي الحالة i، وليكن $T(i)$ يرمز إلى مجموعة الحالات التي يمكن الوصول إليها من الحالة i أما $F(i)$ فتكون عبارة عن مجموعة الحالات التي يمكن الوصول منها إلى الحالة i، ومن ثَم فإنه من الواضح أن $C(i)$ يكون عبارة عن تقاطع المجموعتين $T(i)$، $F(i)$، أما إذا كان $C(i) = T(i)$ فإن الفصل $C(i)$ يكون مغلقاً.

توضح الخوارزمية التالية الخطوات التي يمكن اتباعها لتقسيم فضاء الحالة S إلى فصول التكافؤ المتنافية مثنى مثنى E_1، E_2، ...، E_m.

الخوارزمية (٤,١)

١- لأي حالة $i \in S$، خذ $T(i) = \{i\}$ و $F(i) = \Phi$.

٢- لأي حالة $i \in S$ ، نفذ ما يلي:

لأي حالة $k \in T(i)$ أضف إلى $T(i)$ جميع الحالات j التي تحقق أن $p_{kj} > 0$ (إذ لم تكن k موجودة فعلاً هناك). كرر نفس العمل حتى تنتهي الحالات التي تحقق هذه الخاصية.

٣- لأي حالة $i \in S$ ، نفذ ما يلي:

أضف الحالة j إلى $F(i)$ إذا كانت الحالة $i \in T(j)$. كرر نفس العمل حتى تنتهي الحالات التي تحقق هذه الخاصية.

٤- لأي حالة $i \in S$ ، أوجد $C(i) = F(i) \cap T(i)$.

لنفرض أن الفصول E_1 ، E_2 ، ...، E_n $(1 \le n \le m)$ مغلقة وأن باقي الفصول غير مغلقة (إذا بعضها موجوداً). بتجميع جميع الحالات غير المغلقة في المجموعة E_0 مجموعة الحالات العابرة، إذن يمكن كتابة مصفوفة احتمالات الانتقال لسلسة ماركوف على الصورة التالية:

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & P_n & 0 \\ R_1 & R_2 & R_3 & \cdots & R_n & Q \end{pmatrix}$$

حيث إن P_i هي مصفوفة احتمالات الانتقال بين حالات الفصل المغلق E_i ، $i = 1, \cdots, n$. نلاحظ أنه يمكن تبديل الصفوف إذا تطلب الأمر حتى تمثل احتمالات الانتقالات المتناظرة لقائمة الحالات المرتبة بالشكل E_1 ، E_2 ، ...، E_n ، E_0. يمكن كتابة مصفوفة انتقالات الاحتمال في الشكل المعطى بصيغة قانونية. إذا كان الاهتمام فقط حول العلاقات بين الحالات العابرة والفصول المغلقة ولا نهتم بالانتقالات داخل الفصول المغلقة، فإنه يمكن تجميع الحالات في كل الفصول المغلقة في حالة واحدة، بمعنى أن نجعل كل فصل مغلق كحالة ماصة. ومن ثم فإنه يمكن كتابة الصيغة القانونية كالآتي:

$$P = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ R & Q \end{pmatrix} \qquad (٤,٥)$$

حيث إن I_n مصفوفة الوحدة بالبعد n. ولنفرض أن v يشير إلى عدد الحالات في الفصل E_0، إذن R تكون مصفوفة $v \times n$ و Q تكون مصفوفة $v \times v$.

مثال (٤,٤٠)

لنفرض أن سلسلة ماركوف بفضاء الحالة $S = \{1,2,\cdots,10\}$ و م.ح.ن. التالية:

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \end{array}$$

يمكن تحديد الفصول المتكافئة لسلسلة ماركوف في هذا المثال كالآتي:

أولاً: نحسب $T(i)$، $F(i)$ لكل $i \in S$، لنحصل على:

$T(1) = \{1,3\}$, $T(2) = \{2,7,9\}$, $T(3) = \{1,3\}$, $T(4) = \{5,4,9,2,7\}$,
$T(5) = \{5,4,9,2,7\}$, $T(6) = \{6\}$, $T(7) = \{7,9,2\}$,
$T(8) = \{3,4,8,10,1,5,2,7,9\}$, $T(9) = \{2,7,9\}$, $T(10) = \{2,5,10,7,4,9\}$.
$F(1) = \{1,3,8\}$, $F(2) = \{2,4,5,7,8,9,10\}$, $F(3) = \{1,3,8\}$,
$F(4) = \{5,4,8,10\}$, $F(5) = \{4,5,8,10\}$, $F(6) = \{6\}$,
$F(7) = \{2,4,5,7,8,9,10\}$, $F(8) = \{8\}$, $F(9) = \{2,4,5,7,8,9,10\}$,
$F(10) = \{8,10\}$.

ثانياً: نحسب الفصول $C(i) = T(i) \cap F(i)$ لكل $i \in S$، لنحصل على:

$C(1)=\{1,3\}$, $C(2)=\{2,7,9\}$, $C(3)=\{1,3\}$, $C(4)=\{4,5\}$, $C(5)=\{4,5\}$,
$C(6)=\{6\}$, $C(7)=\{2,7,9\}$, $C(8)=\{8\}$, $C(9)=\{2,7,9\}$, $C(10)=\{10\}$.

ثالثاً: نحدد أي هذه الفصول مغلق وأيها مفتوح، فنجد أن: $E_1=\{1,3\}$ ، $E_2=\{2,7,9\}$ ، $E_3=\{6\}$ ، $E_0=\{4,5,8,10\}$. ومن ثم فإنه يمكن الحصول على الصيغة القانونية لمصفوفة احتمالات الانتقال في الشكل التالي:

$$P=\begin{array}{c|cc|ccc|c|cccc}
 & 1 & 3 & 2 & 7 & 9 & 6 & 4 & 5 & 8 & 10 \\
\hline
1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & & & & & & \\
3 & 1 & 0 & & & & & & & & \\
\hline
2 & & & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & & & & & \\
7 & & & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & & & & & \\
9 & & & 1 & 0 & 0 & & & & & \\
\hline
6 & & & & & & 1 & & & & \\
\hline
4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
5 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\
8 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\
10 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\
\hline
\end{array}$$

والتي يمكن كتابتها في الصورة (٤,٥) كما يلي:

$$P=\begin{array}{c|ccc|cccc}
 & E_1 & E_2 & E_3 & 4 & 5 & 8 & 10 \\
\hline
E_1 & 1 & 0 & 0 & & & & \\
E_2 & 0 & 1 & 0 & & & & \\
E_3 & 0 & 0 & 1 & & & & \\
\hline
4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
5 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\
8 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\
10 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\
\hline
\end{array}$$

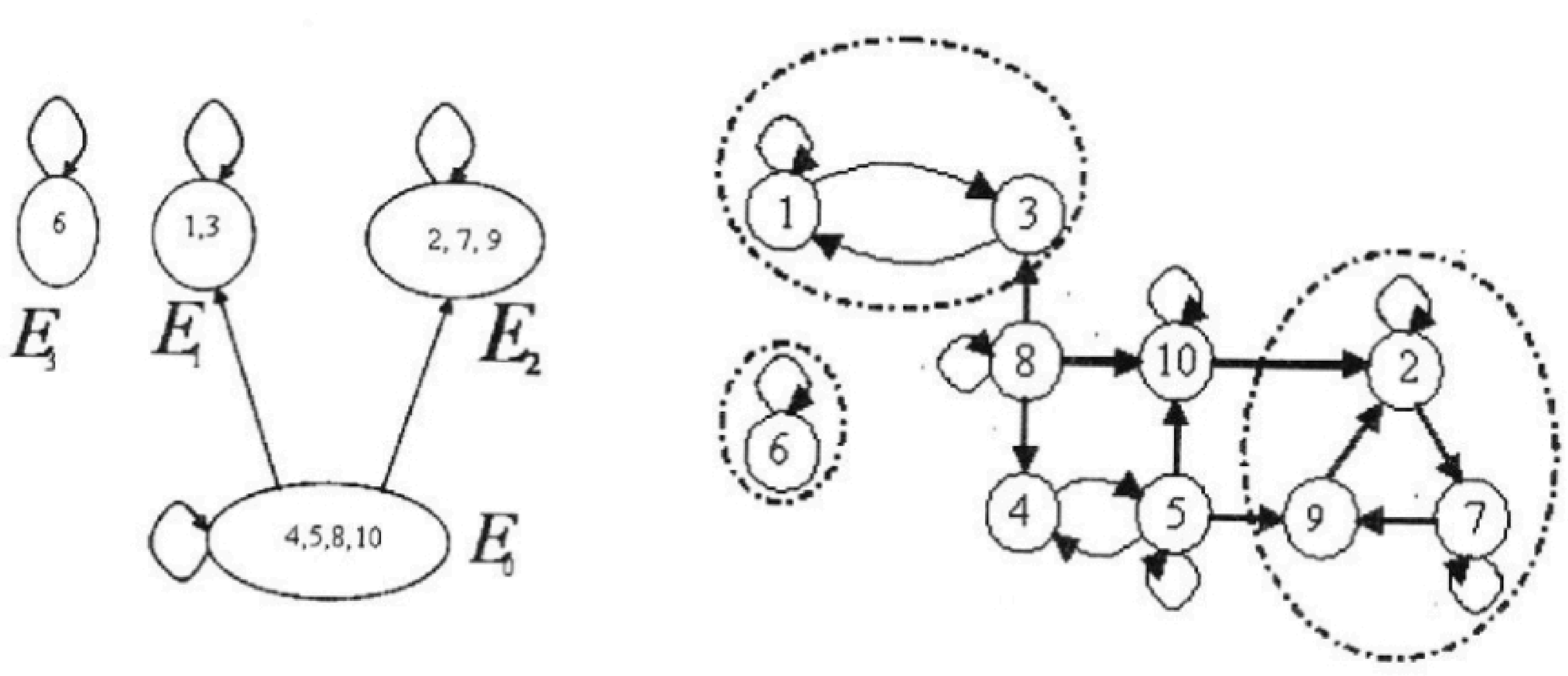
وهذا يعني أنه يمكن كتابة مصفوفة احتمالات الانتقال في الصورة القانونية التالية:

$$P = \begin{pmatrix} I_3 & 0 \\ R & Q \end{pmatrix}$$

حيث أن I_3 مصفوفة الوحدة من رتبة 3، وأن R مصفوفة 4×3 ، Q مصفوفة 4×4 ، وهما:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{،} \quad R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

من المهم هنا أن نوجه عناية القارئ إلى أنه يمكن استخدام الرسم البياني والرسم البياني المختزل لتحديد الفصول المغلقة والمفتوحة ومن ثم إمكانية إعادة مصفوفة احتمالات الانتقال في الصيغة القانونية. يوضح الشكل (٨، ٤) الرسم البياني والرسم البياني المختزل للسلسلة في المثال (٤٠، ٤).



الرسم البياني المختزل الرسم البياني

شكل (٤،١٩): التمثيل البياني لسلسلة ماركوف في المثال (٤٠، ٤).

يتضح من الرسم أن الفصول المغلقة هي $E_1 = \{1,3\}$ ، $E_2 = \{2,7,9\}$ ، $E_3 = \{6\}$ ، أما الفصل $E_0 = \{4,5,8,10\}$ فهو فصل مفتوح، وهذا ما حصلنا عليه سابقاً. كما يمكن الحصول على الصيغة القانونية لمصفوفة احتمالات الانتقال من الرسم أيضاً، بطريقة أبسط من الطريقة السابقة. من الواضح أن طريقة التمثيل البياني تكون أبسط من الطريقة الحسابية، إلا إنه ليس

من السهل دائمًا الحصول على التمثيل البياني لسلاسل ماركوف وخصوصاً عندما يكون عدد حالات السلسلة كبيراً.

تعريف (٤,١٤)

تسمى سلسلة ماركوف بالسلسلة الماصة **absorbing** إذا أمكـــن كتابـــة م.ح.ن في الصيغة القانونبة (٤,٥).

بناء على التعريف السابق، يتضح أن السلسلة في المثال (٤,٤٠) تكون سلسلة ماصة.

فيما يلي سنقدم طريقة لحساب متوسط الأزمنة الماصة واحتمـــالات الامتـــصاص في الفصول الارتدادية.

لنفرض أن لدينا سلسلة ماصة لماركوف بمصفوفة احتمالات الانتقـــال في الـــصيغة القانونية (٤,٥)، إذن يمكن أن نقوم بالإجابة على ما يلي:

١- إذا بدأت السلسلة من حالة عابرة معلومة، ما هو العدد المتوقع للحالات التي تزورهـــا السلسلة قبل أن تصل إلى حالة ماصة؟

٢- ما هو العدد المتوقع للدورات التي تقضيها السلسلة في حالة عابرة قبل أن تصل السلسلة إلى حالة ماصة؟

٣- ما هو احتمال أن تنتهي السلسلة في حالة ماصة معينة بشرط أنها بدأت مـــن حالـــة عابرة؟

متوسط الزمن حتى الامتصاص: Mean time of absorption

لنعرِّف u_{ij} على أنه العدد المتوقع لزيارات السلسلة للحالة j بشرط أنها بدأت مـــن الحالة i. في البند (٥,١) سنقدم مناقشة حول u_{ij} لسلاسل ماركوف عامة. والآن نفرض أن الحالة j حالة ماصة لسلسة ماصة، إذن فإن السلسلة إما أن تمتص في الحالة j وتبقى هنـــاك إلى الأبد وإما أن تمتص في حالة أخرى مختلفة عن j ولن تعود أبدًا ثانية إلى الحالة j. إضافة إلى ذلك، إذا بدأت السلسلة من حالة ماصة i فإنها ستبقى فيها للأبد. ومن ثَم الحالة الوحيدة والتي سنهتم بها هنا هي حالة u_{ij} عندما يكون كل من i و j حالة عابرة لسلسلة ماصة.

تأخذ المصفوفة $U=(u_{ij}), i,j \in E_0$ مكانة هامة جدًا في تحليل سلاسل مـــاركوف الماصة المحدودة، فهي تظهر في الكثير من النتائج المتعلقة بسلاسل مـــاركوف، لـــذا تـــسمى بالمصفوفة الأساسية **fundamental matrix**.

نظرية (٤,١٠)

لنفرض أن $\{X_n\}$ سلسلة محدودة لماركوف. إذن المصفوفة الأساسية تعطى بـــ :

$$U=(I_v-Q)^{-1}$$

حيث إن I_v هي مصفوفة الوحدة من درجة v ، v وهو عدد الحالات العابرة.

مثال (٤,٤١)

بالعودة إلى السلسلة $\{R_n\}$ المعطاة في المثال (٤,١٧)، وللاصطلاح يمكن إعادة كتابة م.ح.ن. لهذه السلسلة في الشكل القانوني التالي:

$$P=\begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ R & Q \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \\ F \\ S \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} F & S & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

يمكن حساب:

$$U=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{26}{21} & \frac{2}{7} & \frac{5}{7} & \frac{2}{21} \\ \frac{4}{21} & \frac{10}{7} & \frac{4}{7} & \frac{10}{21} \\ \frac{10}{21} & \frac{4}{7} & \frac{10}{7} & \frac{4}{21} \\ \frac{2}{21} & \frac{5}{7} & \frac{2}{7} & \frac{26}{21} \end{pmatrix} \end{array}$$

ومن ثم فإن العدد المتوقع لعدد مرات زيارة الفأر للغرفة رقم 3 قبل أن يحصل على طعام أو أن يصاب بصدمة كهربائية (أي قبل أن تدخل السلسلة في حالة ماصة) بشرط أنه بدأ من الغرفة

رقم i، u_{i3}، ($i = 2,3,4,5$) هو:

$$u_{53} = \frac{5}{7} \ ، \ u_{43} = \frac{4}{7} \ ، \ u_{33} = \frac{10}{7} \ ، u_{23} = \frac{2}{7}$$

والآن ليكن u_i هو العدد المتوقع لانتقالات السلسلة قبل الوصول إلى أحد الحالات الماصة بشرط أن السلسلة بدأت من الحالة العابرة i، نسمي u_i بمتوسط زمن الامتصاص expected absorption time (من الحالة i) أو متوسط الزمن حتى الامتصاص mean time to absorption.

لاحظ أن السلسلة يمكن أن تزور الحالات العابرة قبل الامتصاص، ولذلك بالبدء من الحالة i فإن بمتوسط زمن الامتصاص يكون ببساطة عبارة عن مجموع الأعداد المتوقعة لزيارات جميع الحالات العابرة، وهذا يقود إلى النتيجة التالية:

نتيجة (٤,١)

ليكن $u = (u_i), i \in E_0$، إذن u تعطى بالعلاقة التالية:

$$u = U e$$

حيث إن e متجه عمود جميع عناصره تساوي الواحد.

الصيغة السابقة تعني أنه يمكن الحصول على عناصر المتجه u من العلاقة التالية:

$$u_i = \sum_{j \in E_0} u_{ij} \ , \ i \in E_0$$

وهو عبارة عن مجموع عناصر الصف المقابل للحالة i في المصفوفة E_0.

مثال (٤,٤٢)

بالعودة إلى السلسلة $\{R_n\}$ المعطاة في المثال (٤,٤١)، وبفرض أن الفأر بدأ من الغرفة 2، إذن العدد المتوقع لانتقالات الفأر بين الغرف قبل أن يحصل على طعام أو يصعق يساوي مجموع عناصر الصف الأول (المناظر للحالة 2) للمصفوفة الأساسية:

$$u_2 = u_{22} + u_{23} + u_{24} + u_{25} = \frac{26}{21} + \frac{2}{7} + \frac{5}{7} + \frac{2}{21} = \frac{49}{21}$$

احتمال الامتصاص: Probability of absorption

لنعرِّف v_{ij} على أنه احتمال أن السلسلة ستزور الحالة j بشرط أنها بدأت من الحالة i. في البند (٥,١) سنناقش الاحتمالات v_{ij} لسلاسل ماركوف عامة. والآن سندرس هذه الاحتمالات فقط للسلاسل الماصة.

إذا بدأت السلسلة من الحالة الماصة i إذن $v_{ii}=1$ و $v_{ij}=0$ لأي $i \neq j$. ومن ثَم دعنا نفرض من الآن فصاعدًا أن السلسلة تبدأ من حالة عابرة $i \in E_0$. والآن بفرض الحالة الماصة $j \notin E_0$، فإن v_{ij} يسمى احتمال الامتصاص absorbing probability من الحالة العابرة i إلى الحالة الماصة j.

نظرية (٤,١١)

لنفرض أن $\{X_n\}$ سلسلة ماركوف محدودة وليكن $A=(v_{ij}), i \in E_0, j \notin E_0$. إذن المصفوفة A تعطى بالعلاقة التالية:

$$A = U\,R$$

البرهان

يترك كتمرين.

مثال (٤,٤٣)

لنعد إلى السلسلة $\{R_n\}$ المعطاة في المثال (٤,١٧)، نريد حساب المصفوفة التالية:

$$A = \begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} F & S \end{array} \\ \begin{pmatrix} v_{2F} & v_{2S} \\ v_{3F} & v_{3S} \\ v_{4F} & v_{4S} \\ v_{5F} & v_{5S} \end{pmatrix} \end{array}$$

باستخدام المصفوفة U المحسوبة في المثال (٤,٤٢)، يمكن حساب مصفوفة احتمالات الامتصاص A كما يلي:

$$A=\begin{pmatrix}\frac{26}{21}&\frac{2}{7}&\frac{5}{7}&\frac{2}{21}\\ \frac{4}{21}&\frac{10}{7}&\frac{4}{7}&\frac{10}{21}\\ \frac{10}{21}&\frac{4}{7}&\frac{10}{7}&\frac{4}{21}\\ \frac{2}{21}&\frac{5}{7}&\frac{2}{7}&\frac{26}{21}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\ \frac{1}{3}&0\\ 0&\frac{1}{3}\\ 0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{array}{c|cc} & F & S\\ \hline 2 & \frac{5}{7} & \frac{2}{7}\\ 3 & \frac{4}{7} & \frac{3}{7}\\ 4 & \frac{3}{7} & \frac{4}{7}\\ 5 & \frac{2}{7} & \frac{5}{7}\end{array}$$

ومن ثم، على سبيل المثال، إذا بدأ الفأر من الغرفة 3، فإن احتمال أن يجد الطعام هو $v_{3F}=\frac{4}{7}$ بينما احتمال أن يصعق هو $v_{3S}=\frac{3}{7}$.

مثال (٤,٤٤)

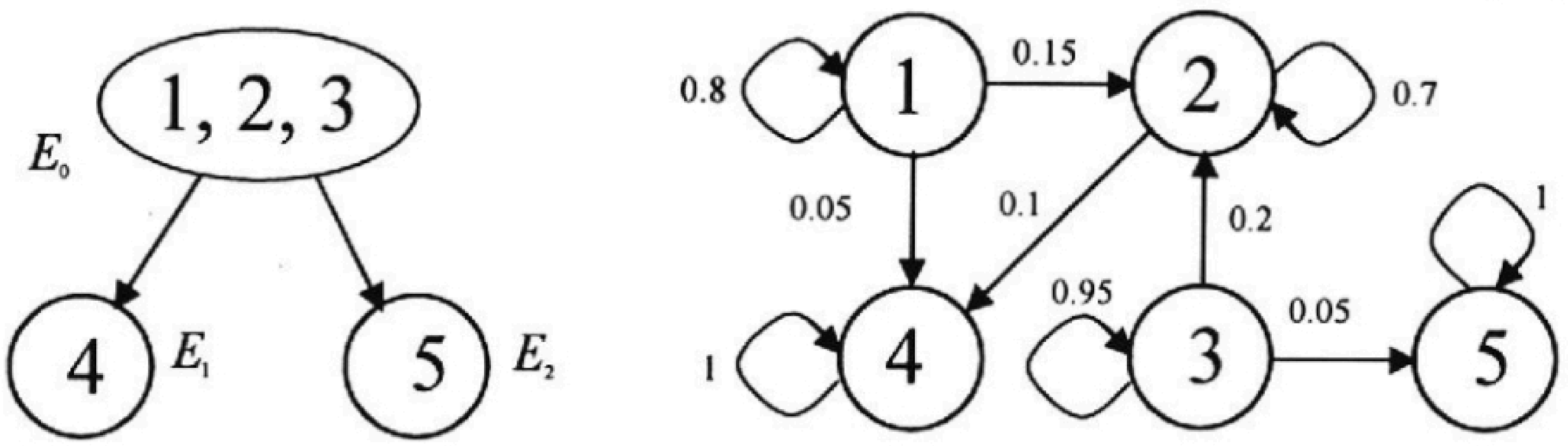
يوظف مكتب للمحاماة ثلاث درجات من وظيفية: درجة 1 "محامٍ أصغر سنًا"، درجة 2 "محامٍ أكبر سنًا" ودرجة 3 "محامٍ مشارك". خلال العام فإن المحامي من الدرجة 1 يمكن أن يترقى إلى الدرجة 2 باحتمال 0.15 أو يترك المكتب باحتمال 0.05. كما أن المحامي من الدرجة 2 يمكن أن يترقى إلى الدرجة 3 باحتمال 0.2 أو يترك المكتب باحتمال 0.1. احتمال أن يترك محامٍ من الدرجة 3 المكتب هو 0.05. كما أن المكتب لا ينقص درجة أي محامٍ. يمكن وصف سيرة محامٍ من موظفي هذا المكتب بمصفوفة ماصة لماركوف بالحالات الخمس التالية: الحالة 1 "محامٍ من الدرجة 1" ، الحالة 2" محامٍ من الدرجة 2"، الحالة 3 "محامٍ من الدرجة 3"، الحالة 4 "يترك المكتب وهو في الدرجة 1"، الحالة 5 "يترك المكتب وهو في الدرجة 3" ومصفوفة احتمال الانتقالات:

$$P=\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ \hline 1 & 0.80 & 0.15 & 0 & 0.05 & 0\\ 2 & 0 & 0.70 & 0.20 & 0.10 & 0\\ 3 & 0 & 0 & 0.95 & 0 & 0.05\\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}$$

كل من الحالتين 4، 5 تكون حالة ماصة، أما جميع الحالات الباقية تكون حالات عابرة. يمكن إعادة كتابة م.ح.ن. في الصيغة القانونية (٤,٥) كالآتي:

$$P = \begin{array}{c} \\ 4 \\ 5 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.05 & 0 & 0.80 & 0.15 & 0 \\ 0.10 & 0 & 0 & 0.70 & 0.20 \\ 0 & 0.05 & 0 & 0 & 0.95 \end{pmatrix} \end{array}$$

يمكن الحصول على الصيغة القانونية السابقة باستخدام الرسم البياني الموضح في الشكل (٤,٢٠).



شكل (٤,٢٠): التمثيل البياني لسلسلة ماركوف في المثال (٤,٤٤).

والمطلوب الإجابة على الأسئلة التالية:

١- ما هو متوسط الزمن الذي يقضيه محامٍ جديد في المكتب؟

٢- ما هو احتمال أن يترك أحد موظفي المكتب العمل فيه وهو في المرتبة 3 بشرط أنه التحق بالعمل فيه من المرتبة الأولى؟

٣- ما هو متوسط الزمن الذي يقضيه محامٍ في الدرجة 3؟

الحل

يمكن استخدام النتائج التي حصلنا عليها مسبقاً في الإجابة على جميع هذه التساؤلات.

لدينا في هذا المثال ما يلي:

$$R=\begin{pmatrix}0.05 & 0\\ 0.10 & 0\\ 0 & 0.05\end{pmatrix} \text{ و } Q=\begin{pmatrix}0.80 & 0.15 & 0\\ 0 & 0.70 & 0.20\\ 0 & 0 & 0.95\end{pmatrix}$$

ومن ثَم فإن:

$$I-Q=\begin{pmatrix}0.20 & -0.15 & 0\\ 0 & 0.30 & -0.20\\ 0 & 0 & 0.05\end{pmatrix}$$

ومن ثم فإن:

$$U=(I-Q)^{-1}=\begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3\\ \hline 1 & 5 & 2.5 & 10\\ 2 & 0 & \frac{10}{3} & \frac{40}{3}\\ 3 & 0 & 0 & 20\end{array}$$

وأيضًا:

$$A=U\,R=\begin{array}{c|cc} & 4 & 5\\ \hline 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 2 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ 3 & 0 & 1\end{array}$$

١- متوسط الزمن الذي يقضيه محامي جديد في المكتب = متوسط الزمن الذي يقضيه في المكتب في الدرجة 1 + متوسط الزمن الذي يقضيه في المكتب في الدرجة 2 + متوسط الزمن الذي يقضيه في المكتب في الدرجة 3. والآن لدينا:

متوسط الزمن الذي يقضيه في المكتب في الدرجة 1 = $(I-Q)^{-1}_{11} = 5$ ،

متوسط الزمن الذي يقضيه في المكتب في الدرجة 2 = $(I-Q)^{-1}_{12} = 2.5$ ،

متوسط الزمن الذي يقضيه في المكتب في الدرجة 3 = $(I-Q)^{-1}_{13} = 10$ ،

ومن ثَم فإن متوسط الزمن الذي يقضيه محامٍ جديد في المكتب= $5+2.5+10=17.5$ من الأعوام.

٢- احتمال انتقال محامٍ من الدرجة 1 إلى الدرجة 3 هو عبارة عن احتمال أن يترك المكتب

وهو على الدرجة 3. وحيث إن الحالة 1 هي أن المحامي في الدرجة 1، و الحالة 4 هي أن يترك المحامي المكتب وهو على الدرجة 3 إذن الإجابة تكون عبارة عن العنصر (٢,١) في المصفوفة $(I-Q)^{-1}R$، أي أن قيمة الاحتمال هي 0.5.

٣- نبحث عن متوسط عدد الأعوام التي يقضيها المحامي في الحالة 3 بشرط أنه بدأ من الحالة 3، من الواضح أن هذا العدد ببساطه هو العنصر (٣,٣) في المصفوفة $(I-Q)^{-1}$، أي أنه يساوي 20 عام. وهذه إجابة منطقية لأنه توجد فرصة واحدة كل عام بين 20 يمكن أن يترك فيها المحامي المكتب وهو على الدرجة 3، ومن ثَم فإن متوسط عدد الأعوام التي يقضيها المحامي في الحالة 3 قبل أن يترك المكتب هو 20 عاماً.

(٤,٧) تمارين

(٤,١) حدد الحالات المتصلة مع بعضها إذا كانت م.ح.ن. هي:

$$P=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & 0 & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

(٤,٢) بفرض أن لديك سلاسل ماركوف بـ م.ح.ن. التالية، أوجد الحالات المتصلة مع بعضها وصنف الحالات من حيث الارتداد والعبور، واحسب P^2:

$$P=\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}, \quad P=\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array},$$

(٤,٣) لسلاسل ماركوف بـ م.ح.ن. التالية، أوجد الحالات الارتدادية والعابرة:

$$P = \begin{array}{c|cccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{7}{8} & 0 \\ 3 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 4 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 5 & 0 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array}, \quad P = \begin{array}{c|cccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ 3 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 4 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 5 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{array}$$

$$P = \begin{array}{c|ccccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

(٤,٤) صنف حالات سلسلة ماركوف في المثال (٢,٩).

(٤,٥) صنف حالات سلسلة ماركوف في المثال (٢,١٧).

(٤,٦) صنف حالات سلسلة ماركوف في المثال (٢,٣٤).

(٤,٧) صنف حالات سلاسل ماركوف بمصفوفات احتمالات الانتقال التالية:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.4 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0.5 & 0.3 \\ 0.5 & 0 & 0.3 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0.5 & 0 & 0.2 \end{pmatrix} \text{،} \quad P = \begin{pmatrix} 0.8 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.4 & 0 & 0.3 \end{pmatrix}$$

$$P=\begin{pmatrix} 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0.9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}،$$

$$P=\begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0.4 \\ 0.3 & 0 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(٤,٨) لنفرض أن $\{X_n\}$ سلسلة ماركوف بمصفوفات احتمالات الانتقال التالية:

$$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

اختبر ما إذا كانت السلسلة $\{X_n\}$ تكون غير مختزلة، أوجد الفصول المتكافئة لهذه السلسلة ثم صفها.

(٤,٩) ادرس سلاسل ماركوف بمصفوفات احتمالات الانتقال التالية، وأوجد الفصول المتكافئة لكل منها ثم صفها:

$$P=\begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.7 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ و } P=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(٤,١٠) لنفرض أن $\{X_n\}$ سلسلة ماركوف بمصفوفات احتمالات الانتقال التالية:

$$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

حلل حالات سلسلة ماركوف كما في المثال (٤,٤٠).

(٤,١١) يقوم متجر ما بتصليح نوعين من المعدات E_1 و E_2. يلزم تصليح المُعَدَّة E_1 يومين بينما يتطلب تصليح المُعَدَّة من النوع E_2 يوماً واحداً. احتمال أن تتعطل مُعَدَّة من النوع E_1 يوميًا هو $\frac{1}{3}$ بينما احتمال تعطل مُعَدَّة من النوع E_2 هو $\frac{1}{2}$. إذ لم يتمكن هذا المتجر من القيام بتصليح أي من المُعَدَّتين فإنه يرسلها إلى متجر قريب ليتم تصليحها هناك. يتبنى المتجر السياسة التالية:
إذا تم قضاء اليوم في إصلاح مُعَدَّة من النوع E_1 فإنه يتم رفض أي عملية إصلاح في اليوم التالي، وإذا استقبل أي مُعَدَّة في يوم آخر فإنه يقبل أن يقوم بإصلاحها. ويريد المتجر أن يعرف هل يقبل تصليح مُعَدَّة من النوع E_1 أو يصلح مُعَدَّة من النوع E_2.
١- أوجد مصفوفة احتمالات الانتقال.
٢- ارسم الرسم البياني والرسم البياني المختزل للسلسلة.

(٤,١٢) تم وضع ثلاث عملات معدنية في صف ثم استخدمت في بناء سلسلة ماركوف بالطريقة التالية: E_n عدد الصور في المرحلة n، وفي كل خطوة يتم اختيار قطعة عملة عشوائيًا ثم يتم إلقاؤها.
١- أوجد مصفوفة احتمالات الانتقال.
٢- هل هذه السلسلة غير مختزلة؟
٣- صنف حالات السلسلة من حيث الارتداد والعبور ثم أوجد دوراتها.

(٤,١٣) لنعد إلى المثال (٣,٢٦) والأمثلة (٤,٢٣) و (٤,٢٩) و (٤,٣٨):

١- لنفـــــرض أن $p_1 = p_3 = p_5 = \cdots = 0$ و $p_2 = \frac{1}{2}$ و $p_4 = \frac{1}{4}$ و $p_6 = 0$ و $p_8 = \frac{1}{4}$ و $p_{10} = p_{12} = \cdots = 0$. صنف جميع حالات السلسلة.

٢- صنف جميع حالات السلسلة في الحالة العامة.

(٤,١٤) وضح أن سلسلة ماركوف غير المختزلة تكون دورية إذا كان على الأقل أحد عناصر القطر الرئيسي لمصفوفة احتمالات الانتقال للسلسلة أكبر من الصفر.

(٤,١٥) لنفرض أن $\{X_n\}$ سلسلة ماركوف بمصفوفة احتمالات الانتقال التالية:

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

لنفرض أن السلسلة بدأت من الحالة العابرة 1:

١- وضح أن متوسط زمن الامتصاص يساوي $\frac{1}{1-\beta}$.

٢- أثبت أن احتمال أن تمتص السلسلة في الحالتين 0، 2 على الترتيب همـــا $\frac{\alpha}{\alpha+\gamma}$ ، $\frac{\gamma}{\alpha+\gamma}$.

(٤,١٦) عمم التمرين السابق عندما تكون $\{X_n\}$ سلسلة ماركوف بأربع حالات وبمصفوفة احتمالات الانتقال التالية:

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

(٤,١٧) لنفرض أن لدينا سيارة ونفرض أن هذه السيارة بدأت وهي بحالة ممتازة، والتي نرمز لها بالحالة 1، وكل ما تسعمل هذه السيارة تتدهور حالتها نتيجة لبعض المـــشاكل الميكانيكية وبعض عوامل البيئة المحيطة مثل سوء الطرق وسوء الطقـــس. ســـتنتقل السيارة بين الحالات 2، 3، 4 (الجيدة، الوسط، السيئة) في طريقها إلى أن تكـــون

بالية. لنفرض أن الانتقال السنوي من حالة إلى أخرى يكون سلسلة ماركوف بمصفوفة احتمالات الانتقال التالي:

$$P = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

وضح أن متوسط الزمن اللازم حتى تصل السيارة إلى الحالة السيئة من الحالة الممتازة، الجيدة، الوسط هو على الترتيب 7.83 من الأعوام، 4.5 من الأعوام ، 2 من الأعوام.

(٤,١٨) يضارب شخص ما في البورصة بـ 10$. بدأ المضاربة ومعه 20$ وقد وضع لنفسه خطة معينة على أن يعاود المضاربة مرة إذا كان معه ضعف ما كان معه من نقود أو خسر كل ما معه من نقود. بفرض أن احتمال أن يخسر هو 0.6 واحتمال أن يكسب هو 0.4 في كل مرة، ما العدد المتوقع لمضارباته حتى يخرج من السوق. إذا رمزنا بـ X_n لما معه من نقود بعد المضاربة رقم n، إذن $\{X_n\}$ تكون سلسلة ماركوف.

١- أوجد م.ح.ن. لهذه السلسة.

٢- وضح أنه سيضارب في المتوسط بعدد 3.85 مرة قبل إما أن يخسر ما معه من نقود أو يصبح ماله ضعف ما بدأ به المضاربة.

٣- ما هو متوسط عدد المرات التي يضارب فيها هذا الشخص قبل أن يخرج من السوق إذا بدأ بـ 10$؟ وإذا بدأ بـ 30$؟

٤- احسب $\lim_{n\to\infty} P^n$. استنتج احتمالات أن المضارب سينتهي من المضاربة أو يضاعف ما معه من نقود إذا بدأ بـ 30$؟ وإذا بدأ بـ 10$؟

٥- استخدم النظرية (٤,١١) للحصول على نفس هذه الاحتمالات.

٦- إذا افترضنا أنه بدأ ومعه 20$ فما عدد المرات الذي كان فيها رصيده 10$ قبل

أن يصل إلى حالة ماصة؟

(٤,١٩) يتحدث أربعة أشخاص (A,B,C,D) معًا، عندما ينتهي الأول من الكلام فإنه من الممكن أن يبدأ أحد الثلاثة الباقين الحديث بنفس الاحتمال. في هذه الحالة فإن عملية الانتقال من متحدث إلى آخر تكون سلسلة ماركوف.

١- أوجد م.ح.ن. لهذه السلسلة؟

٢- ما هو العدد المتوقع للانتقالات من المتحدث A حتى يتحدث D. بفرض أن D حالة ماصة، احسب العدد المتوقع للانتقالات (تغير المتحدث) حتى يتحدث الشخص D إذا كان الشخص A هو الذي بدأ المحادثة.

(٤,٢٠) يمكن أن يمر برنامج كمبيوتر بأربع مراحل 1، 2، 3، 4 عندما يتم تنفيذه ويتوقف في المرحلة 5. لنفرض أن الانتقال بين هذه المراحل يتبع سلسلة ماركوف بمصفوفة احتمالات الانتقال التالية:

$$P=\begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.1 & 0.4 \\ 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.4 \\ 0 & 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.5 \\ 0 & 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

بفرض أن البرنامج بدأ من المرحلة 1، أوجد متوسط عدد انتقالات البرنامج حتى يتوقف.

(٤,٢١) يمكن لأحد العاملين في الجامعة عندما يأتي بسيارته أن يختار من بين ثلاثة مواقف A,B,C ليركن سيارته، يدخل من موقف إلى آخر باحثًا عن مكان ينتظر فيه، حيث إن حركته بين المواقف تكون دائمًا دائرية من A إلى B ثم إلى C ثم يبدأ الدورة من جديد من A وهكذا. وكل مرة يدخل فيها الموقف A أو B فإن احتمال أن يجد مكاناً ينتظر فيه هو 0.6، أما احتمال أن يجد مكاناً للانتظار في الموقف C فهو 0.3. لنفرض أن حالات النظام تكون: في المنزل (H)، يدخل

الموقف A وينتظر هناك (AP)، يدخل الموقف A ولا ينتظر هنـــاك (ANP)، يدخل الموقف B وينتظر هناك (BP)، (BNP)، (CP)، (CNP).

١- أوجد م.ح.ن. لهذه السلسة.

٢- احسب متوسط عدد الانتقالات التي يجب أن يقوم بها هذا الرجل حـــتى يجـــد مكاناً ينتظر فيه، بفرض أنه بدأ من المترل.

الفصل الخامس

مسرانية سلاسل ماركوف

Ergodicity of Markov Chains

(٥,١) مقدمة

يعتبر هذا الفصل امتداداً للمعالجات الأساسية لسلاسل ماركوف التي قدمناها في الفصول الأربعة السابقة. سنقوم بتوضيح كيفية استخدام التصنيف المقدم في الفصل الرابع في حساب الاحتمال $p_{ij}^{(n)}$، أي احتمال أن تكون السلسلة في الحالة j عند اللحظة n بشرط أنها بدأت من الحالة i وذلك عندما تكون n كبيرة.

معظم النتائج التي سنقدمها في هذا الفصل سنذكرها بدون برهان وذلك لسببين. أولهما يرجع إلى أن برهان هذه الخواص يحتاج إلى رياضيات متقدمة قد لا يتوفر عليها قارئ مقرر حول مقدمة في العمليات العشوائية. أما السبب الثاني فيرجع إلى أن غياب البراهين يجعل القارئ على قدر عالٍ من التركيز حول فهم النتائج المقدمة بعيدًا عن كيفية اشتقاقها.

وقبل البدء في عرض بعض نظريات النهايات سنقدم فيما يلي تعميمًا لمفهوم احتمالات العودة return probabilities $v_{ii}(n)$ و v_{ii} واصطلاح زمن الارتداد μ_i والتي قدمت من قبل في الفصل الرابع.

احتمالات زمن المرور الأول: First passage time probabilities

ليكن i و j حالتين مختلفتين ينتميان لفضاء الحالة S و أن $n \ge 1$. إذن $v_{ij}(n)$

يكون احتمال أن السلسلة ستزور الحالة j لأول مرة بعد عدد انتقالات يساوي n بشرط أنها بدأت من الحالة i. أي أن:

$$v_{ij}(n) = P(X_n = j, X_{n-1} \neq j, \ldots, X_1 \neq j \mid X_0 = i)$$

ويسمى هذا الاحتمال باحتمال زمن المرور الأول first passage time probability. وأيضًا سنرمز بالرمز v_{ij} إلى احتمال أن السلسة حتما ستزور الحالة j بشرط أنها بدأت من الحالة i. أي أن:

$$v_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} v_{ij}(n)$$

ونسمي الاحتمال v_{ij} باحتمال الوصول إلى الحالة j من الحالة i. نوضح في المثال التالي كيفية حساب مثل هذه الاحتمالات:

مثال (٥,١)

لنعد إلى سلسلة ماركوف في المثال (٤,١٩)، لقد أوضحنا أن:

$$v_{33}(n) = \begin{cases} \frac{1}{15}, & n = 1, \\ \frac{3}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-2}\left(\frac{1}{3}\right), & n = 2,3,\ldots \end{cases}$$

ومن ثم حسبنا أن $v_{33} = \frac{23}{75}$. والآن نريد حساب v_{13} و v_{23}. من السهل أن نرى أن:

$$\begin{aligned} v_{13}(n) &= 0, & n &= 1,2,\ldots, \\ v_{23}(n) &= \left(\tfrac{1}{3}\right)\left(\tfrac{1}{6}\right)^{n-1}, & n &= 1,2,\ldots. \end{aligned}$$

ومن ثَم فإن:

$$v_{13} = \sum_{n \geq 1} v_{13}(n) = 0$$

وأن:

$$v_{23} = \sum_{n \geq 1} v_{23}(n) = \frac{1}{3} \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} = \frac{2}{5}.$$

ومن ثم يمكن القول بأن:

١- انطلاقًا من الحالة 1 فإنه من المؤكد أن السلسلة لن تزور الحالة 3.

٢- احتمال أنه لن تزور السلسلة الحالة 3 بشرط أنها بدأت من الحالة 2 هو $\frac{3}{5}$.

مثال (٥,٢)

بالعودة إلى المثال (٥,١)، سنوضح الآن طريقة ارتدادية (تكرارية) لحساب الاحتمالات v_{ij}. ليكن $j = 3$ وبتعريف $f_k(i) = v_{i3}(k)$ لقيم $i = 1,2,3$، وأن متجه احتمال الانتقال من الحالة i إلى الحالة 3 لأول مرة بعد k من الخطوات هو $f_k = (f_k(1), f_k(2), f_k(3))^T$، إذن f_1 ببساطة يكون العمود الثالث في المصفوفة P وأنه لقيم $k \geq 2$ فإن:

$$f_k = Q f_{k-1} \qquad (٥,١)$$

حيث إن Q هي المصفوفة التي يمكن الحصول عليها من المصفوفة P باستبدال العمود رقم j بأصفار، أي أن:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{3}{5} & 0 \end{pmatrix}$$

ومن ثَم فإن:

$$f_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{15} \end{pmatrix} \text{ و } f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{18} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} \text{ و } f_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{108} \\ \frac{1}{30} \end{pmatrix} \text{ و } f_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{648} \\ \frac{1}{180} \end{pmatrix} \text{ و } \ldots$$

ومن ثم فإنه يمكن الحصول على الاحتمالات $v_{13}(n) = f_n(1)$، $v_{23}(n) = f_n(2)$، $v_{33}(n) = f_n(3)$ كما في المثال السابق.

يمكن استخدام أحد البرامج الرياضية المعروفة (مثل Matlab، Maple، MathCad، Mathematica، ...) وذلك لاستخدام العلاقة (٥,١) في حساب احتمالات العودة v_{ij}.

مثال (٥,٣)

بفرض سلسلة ماركوف في المثال (٤,٥)، وباستخدام أحد البرامج الرياضية يمكن الحصول على الاحتمالات التالية:

$$v_{11} = 0.378, \quad v_{12} = 0.133, \quad v_{13} = 0,$$
$$v_{21} = 1.0, \quad v_{22} = 0.378, \quad v_{23} = 1.0,$$
$$v_{31} = 0.756, \quad v_{32} = 0.133, \quad v_{33} = 0.567$$

مثال (٥,٤)

بالعودة إلى مثال (٥,١)، سنوضح في هذا المثال طريقة بسيطة أخرى تستخدم طريقة ارتدادية لحساب الاحتمالات . ليكن $V^{(n)} = \{v_{ij}(n)\}$ إذن يمكن التحقق من أن:

$$\begin{aligned} V^{(1)} &= P, \\ V^{(n)} &= PV_0^{(n-1)},\ n = 2,3,... \end{aligned} \qquad (٥,٢)$$

حيث إن A_0 هي المصفوفة التي تنتج من أي مصفوفة مربعة A بعد وضع جميع عناصر قطرها الرئيسي تساوي أصفاراً. يمكن حساب احتمالات المرور الأولى من العلاقات (٥,٢).

يمكن استخدام أحد البرامج الرياضية المعروفة وذلك لاستخدام العلاقات (٥,٢) في حساب الاحتمالات المطلوبة.

مثال (٥,٥)

لنفرض أن سلسلة ماركوف بمصفوفة احتمالات الانتقال التالية:

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \quad 0 \quad & \quad 1 \quad & \quad 2 \quad & \quad 3 \quad \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.1353 & 0.2707 & 0.2707 & 0.3233 \\ 0.1353 & 0.2707 & 0.2707 & 0.3233 \\ 0 & 0.1353 & 0.2707 & 0.5940 \\ 0 & 0 & 0.1353 & 0.8647 \end{pmatrix} \end{array}$$

باستخدام أحد البرامج الرياضية يمكن الحصول على المصفوفة $V^{(n)}$، ويلاحظ أنه عندما تكون n كبيرة ولتكن مثلا 500 فإن الاحتمال التراكمي يكون فقط 0.8949، و يقترب في النهاية إلى القيمة 1. نلاحظ في هذا المثال أن احتمالات الوصول $\{v_{ij}\}$ ستكون جميعاً مساوية للواحد. وهذا يعني أن حالات السلسلة متصلة مع بعضها وأن السلسلة غير قابلة للاختزال irreducible.

متوسط زمن المرور الأول Mean first passage time

لسلسلة ماركوف المسرانية[١]، ليكن μ_{ij} يرمز إلى العدد المتوقع للانتقالات قبل الوصول إلى الحالة j بشرط أن السلسلة حاليا في الحالة i

$$\mu_{ij} = \sum_{n \ge 1} n v_{ij}(n)$$

يسمى هذا العدد μ_{ij} بمتوسط زمن المرور الأول mean first passage time وبالطبع هذا العدد يتطابق مع μ_{ij} المقدم في الفصل الرابع. لنفرض أننا الآن في الحالة i، إذن فإنه باحتمال p_{ij} ستنتقل السلسلة في خطوة واحدة من الحالة i إلى الحالة j. ولأجل $k \neq j$ فإن السلـــسلة بعد ذلك ستنتقل من الحالة j إلى الحالة k باحتمال p_{jk}. وفي هذه الحالة ستأخذ السلـــسلة عددًا من الانتقالات بالمتوسط $(1 + \mu_{ik})$ لتنتقل من الحالة i إلى الحالة j. ومن ثم فإن:

$$\mu_{ij} = p_{ij}(1) + \sum_{k \neq j} p_{ik}(1 + \mu_{kj})$$

وحيث إن:

$$p_{ij} + \sum_{k \neq j} p_{ik} = 1$$

إذن يمكن إعادة كتابة المعادلة الأخيرة في الصورة التالية:

$$\mu_{ij} = 1 + \sum_{k \neq j} p_{ik} \mu_{kj} \qquad (٥,٣)$$

وبحل نظام المعادلات الخطي (٥,٣) يمكن الحصول على متوسطات أزمنة المرور الأولى. ويمكن الحصول على أن (انظر المقترح (٥,١)) :

$$\mu_{ii} = \frac{1}{\pi_i}$$

حيث π_i هو الاحتمال النهائي للحالة i. وهذه النتيجة تبسط استخدام العلاقة (٥,٣).

---

(١) سنقدم تعريف السلاسل المسرانية في البند التالي.

مثال (٥,٦)

لنفرض أن محل بيتزا يقدم نوعين من البيتزا، ولنفرض أن الشخص الذي اشترى النوع 1 تكون فرصة شرائه النوع 1 في المرة التالية هي 90%، وأنه إذا اشترى النوع 2 فإن نسبة شرائه نفس النوع 2 في المرة التالية هي 80% ، وبالنظر إلى عملية شراء أي شخص على أنها سلسلة ماركوف $\{X_n\}$ حيث إن X_n عبارة عن نوع البيتزا التي اشتراها لشخص في المرة الأخيرة وأن مصفوفة احتمالات الانتقال هي:

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} \end{array}$$

ولتوضيح كيفية استخدام العلاقة (٥,٣) دعنا نحسب متوسط زمن المرور الأول. يمكن بسهولة ملاحظة أن $\pi_2 = \frac{2}{3}$ و $\pi_1 = \frac{1}{3}$ ومن ثَم فإن:

$$\mu_{22} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3 \text{ ، } \mu_{11} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = 1.5$$

والآن باستخدام (٥,٣) نحصل على:

$$\mu_{12} = 1 + p_{11}\mu_{12} = 1 + 0.9\mu_{12}$$
$$\mu_{21} = 1 + p_{22}\mu_{21} = 1 + 0.8\mu_{21}$$

وبحل هاتين المعادلتين نجد أن:

$$\mu_{21} = 5 \text{ و } \mu_{12} = 10$$

وهذا يعني أن، على سبيل المثال، أن الشخص الذي اشترى بيتزا من النوع 1 آخر مرة فإنه سيشترى في المتوسط 10 مرات بيتزا من النوع 1 قبل أن يتحول إلى النوع 2، أما الشخص الذي اشترى بيتزا من النوع 2 في آخر مرة فإنه يتوقع أن يشتري خمس مرات أخرى بيتزا من نفس النوع قبل التحول إلى النوع 1.

مثال (٥,٧)

بالعودة إلى سلسلة ماركوف في المثال (٤,٥)، وباستخدام أحد البرامج الرياضية يمكن الحصول على مصفوفة متوسطات أزمنة المرور الأولى التالية:

$$\mu = \begin{pmatrix} 2.667 & 5 & 2 \\ 3 & 2.667 & 5 \\ 3.333 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

(٥,٢) نظريات النهاية

Limit theorems

خاصية المسرانية لسلسلة ماركوف تكون عبارة عن إمكانية إبقائها مستقرة خلال الأفق غير المنتهي.

تعريف (٥,١)

تسمى الحالة i مسرانية ergodic إذا كانت غير دورية و موجبة الارتدادية.

السلسلة غير المختزلة تكون مسرانية إذا كانت جميع حالاتها مسرانية.

مثال (٥,٨)

من بين سلاسل ماركوف بمصفوفات احتمالات الانتقال التالية:

$$P_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ ، } P_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \text{ ، } P_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

فإن كل من السلسلتين بـ P_3 ، P_1 تكونان مسرانية، أما السلسلة ذات P_2 فإنها تكون غير مسرانية. السلسة ذات P_2 تكون غير مسرانية لأنها سلسلة مختزلة حيث يوجد فصلان مغلقان $C_1 = \{1,2\}$ ، $C_2 = \{3,4\}$ والحالات من الفصلين المختلفين تكون غير متصلة مع بعضها.

إذا كانت السلسلة غير المختزلة غير مسرانية فهذا يمكن أن يعني أنها، على سبيل المثال، دورية وهذا يضمن أن جميع الاحتمالات $p_{ii}^{(n)}$ تكون أصفاراً ماعدا عندما $n = kd$ ، حيث d هي دورة السلسلة. خلاف ذلك فإن سلسلة ماركوف المختزلة و غير الدورية يمكن أن تكون جميع حالاتها إما عابرة وإما صفرية الارتداد (recurrent-null) وهذا يقود إلى أن جميع الاحتمالات $p_{ij}^{(\infty)} = 0$ ، $j \in S$. وهذا يعني أنه باحتمال مؤكد فإن $\{X_n\}$ تصل إلى ما

لانهاية عندما يصل الزمن إلى ما لانهاية. وأخيرًا حتى تكون سلسلة ماركوف المنتهية و غير المختزلة عبارة عن سلسلة مسرانية يكفي أن تكون سلسلة غير دورية.

تساعد النظريات التالية في معرفة المواضع المختلفة التي يمكن أن تكون فيها السلسلة في اللانهاية. نذكر بأن μ_{ij} هي زمن الارتداد للحالة j و أن π_j هو الاحتمال النهائي للحالة j عندما يكون موجوداً.

نظرية (٥,١)

لتكن الحالة $\{i\}$ ارتدادية ودورية بدورة d ، إذن:

$$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(nd)} = \frac{d}{\mu_i}$$

نظرية (٥,٢)

١- لتكن الحالة $\{j\}$ عابرة أو صفرية الارتداد recurrent null إذن:

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0,\ \forall i \in S.$$

٢- لتكن الحالة $\{j\}$ موجبة الارتداد إذن:

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)} > 0,$$

وأن:

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = v_{ij}\pi_j\ ,\ \forall i \in S.$$

لقد بينا في الفصل الرابع (الخوارزمية (٤,١)) أن الحالات الارتدادية يمكن تقسيمها بطريقة وحيدة إلى مجموعات مغلقة غير قابلة للاختزال. ومن ثم فيكفي اعتبار مجموعة واحدة من الحالات غير المختزلة. بالإضافة إلى ذلك يمكن حصر سلسلة ماركوف في مجموعة مغلقة من الحالات والتي تكون أيضًا سلسلة ماركوف. ومن ثَم، وبدون فقد للعموم، يمكن أن نتقيد بسلاسل ماركوف الارتدادية و غير المختزلة.

نظرية (٥,٣)

بفرض أن سلسلة ماركوف تكون غير مختزلة و غير دورية، فإن جميع الحالات تكون

إيجابية الارتداد إذا وفقط إذا كان لنظام المعادلات الخطية التالي:

$$\pi = \pi P, \quad \pi e = 1،$$

حل وليكن π، حيث إن $\pi e = \sum_i \pi_i$، بمعنى أن $e = (1,1,\cdots)^T$. إذا وُجِدَ حل π فإنه يكون حلاً وحيداً وموجباً بالتحديد ويكون لدينا:

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}, \ \forall i, j \in S.$$

بناء على النظرية (٤,٨) فإن السلسلة غير المختزلة بالعديد من الحالات المنتهية لا يكون لها حالات فارغة null state ولا يكون لها حالات انتقالية transient states ، ومن ثَم يكـــون لدينا النتيجة التالية.

نتيجة (٥,١)

إذا كانت $\{X_n\}$ سلسلة ماركوف غير مختزلة و غير دورية بحالات عديدة منتهيـــة، إذن نظام المعادلات الخطية التالي:

$$\pi = \pi P, \quad \pi e = 1$$

يكون له حل وحيد موجب بالتحديد π ويكون:

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}, \ \forall i, j \in S.$$

يعتبر المقترح التالي تفسيرًا هامًا للاحتمالات المنتهية.

مقترح (٥,١)

ليكن j حالة موجبة الارتداد و غير دورية وأن μ_j الزمن المتوقع بين أي عـــودتين للحالة j، إذن:

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)} = \frac{1}{\mu_j}$$

من ناحية أخرى الاحتمال النهائي π_j لوجود السلسلة في الحالة j يساوي معـــدل زيارة الحالة j. ومن ثَم فإنه على سبيل المثال إذا كان متوسط الزمن بين زيارتين للحالة j هو $\pi_j = 5.5$، فإنه يتوقع أن تزور السلسلة الحالة j مرة كل 5.5 من الخطوات، ومن ثم

فإن الاحتمال النهائي لوجود السلسلة في الحالة j هو $\pi_j = \frac{1}{5.5}$.

مثال (٥,٩)

يتم مسح خط اتصالات كل دقيقة وذلك لمعرفة ما إذا كان مشغولاً، الحالة (1)، أم غير مشغول، الحالة (2)، الانتقال بين هاتين الحالتين يُكون سلسلة ماركوف بمصفوفة احتمالات الانتقال التالية:

$$P=\begin{pmatrix}0.6 & 0.4\\ 0.1 & 0.9\end{pmatrix}$$

وبناء على الحسابات فإن متجه احتمال الحالات المستقرة هو $\pi = (0.2, 0.8)$. وإذا كانت السلسلة قد بدأت من الحالة (1) أي أن الخط مشغول، وكان احتمال الحالة المستقرة هو 0.2 steady state probability إذن الزمن المتوقع للعودة للحالة (1) "الخط مشغول" هو $\pi_1 = 1/0.2 = 5$ من الدقائق، أو بمعنى آخر فإنه من المتوقع أن تعود السلسلة إلى الحالة (1) بعد أربع انتقالات وهذه نتيجة منطقية وذاك لأن السلسلة تكون في الحالة (1) بمتوسط $1/5$ من المرات ومن ثَم فإنه من المتوقع أنها تعود إلى هذه الحالة مرة كل خمس انتقالات.

مثال (٥,١٠)

في المثال (٤,٢٨) حصلنا على $\pi_1 = 2.33$ والآن نضع قيداً على السلسلة لتكون في المجموعة المغلقة $\{1,2\}$، ومن ثَم فإن هذه السلسلة تكون سلسلة ماركوف محدودة وغير مختزلة و غير دورية. بناء على النتيجة (٥,١) فإنه يكون لهذه السلسلة توزيع نهائي limiting distribution $\pi = (\pi_1, \pi_2)$. وبحسابات بسيطة يمكن الحصول على $\pi_1 = 3/7$ وهذا يؤكد أن العلاقة $\pi_1 = 1/\mu_1$ متحققة.

(٥,٣) السلاسل المختزلة

Reducible chains

بناء على ما تقدم في الجزء السابق يتضح أنه إذا كانت سلسلة ماركوف غير مختزلة وغير دورية فإن:

١- جميع الحالات إما أن تكون عابرة transient أو تكون جميعًا ارتدادية موجبة recurrent positive وفي هذه الحالة فإن $p_{ij}^{n} \to 0$ عندما $n \to \infty$ لجميع i, j ومن ثَم لا يوجد توزيع مستقر stationary distribution.

٢- أو تكون جميع الحالات مسرانية ergodic وفي هذه الحالة يكون للسلسلة توزيع مستقر وحيد.

وعندما تكون سلسلة ماركوف غير مختزلة فإنه وباستخدام الخوارزمية (٤,١) يمكن تجزيء فضاء الحالة S إلى فصول من الحالات المتصلة. بعد عملية التجزيء فإن السلاسل الجزئية وعلاقاتها ببعضها يمكن تحليلها بشكل مستقل وذلك لاختزال الصعوبات التي تواجهنا في التعامل مع بعض هذه المسائل. سنشير بـ E_0 إلى مجموعة الحالات العابرة transient وأن مجموعة جميع الحالات الارتدادية الباقية يمكن تقسيمها إلى فصول متنافية كل منها يمثل مجموعة من الحالات المتصلة:

$$S = E_0 + E_1 + E_2 + \dots$$

إذا كان فضاء الحالة للسلسلة غير محدود (غير منتهٍ) فإن السلسلة يمكن أن تنتقل عندما يؤول الزمن إلى اللانهاية من حالة عابرة إلى حالة أخرى عابرة تنتمي إلى E_0 ولن يحدث ذلك إذا كان فضاء الحالة محدوداً (منتهياً). ففي هذه الحالة فإن السلسلة ستمر باحتمال مؤكد عبر الحالات العابرة فقط خلال عدد محدود من الانتقالات وهي عاجلاً أو آجلاً ستصل إلى حالة ارتدادية i، ومن ثَم فإن السلسلة ستدور في فصل من الحالات الارتدادية يحتوي الحالة i.

توضح النظرية (٥,٣) والنتيجة (٥,١) كيفية الحصول على التوزيع النهائي $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ للحالات الموجبة الارتداد وغير الدورية j. وبفرض أن لدينا مجموعة مغلقة من الحالات غير المختزلة والتي تحتوي الحالة ونريد حساب الاحتمال النهائي لوجود السلسلة في

المجموعة. نعلم من النظرية (٥,٢) أن:

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \nu_{ij}\, \pi_j$$

وذلك لأي حالة i وللحالات غير الدورية j. فبمجرد الحصول على π_j كما أوضحنا سابقًا فإنه يمكن الحصول على جميع النهايات $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ وذلك لجميع الحالات j.

ويمكن تلخيص ذلك كما يلي، عندما يؤول الزمن إلى مالانهاية فإن مصفوفة تجمعات الحالات العابرة تملأ كما يلي:

١- $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$ لجميع $i, j \in E_0$: وهذا يعني أنه عاجلاً أو آجلاً فإن السلسلة ستترك الحالات العابرة منتقلة إلى الحالات الارتدادية.

٢- $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$ لجميع $i \in E_k$ ، $j \in E_l$ حيث إن $k \neq l, k, l \neq 0$: وهذا يعني أن السلسلة لن تترك أي فصل مغلق من الحالات إلى أي فصل آخر من الحالات العابرة terminal class.

٣- $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j = \dfrac{1}{\mu_j}$ لجميع $i, j \in E_k\, , k \neq 0$: وهذا يعني أنها سلسلة جزئية غير مختزلة وغير دورية وأن لها توزيعاً احتمالياً نهائياً.

٤- $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \dfrac{\nu_{ij}}{\mu_j}$ لجميع $i \in E_0$ و $j \notin E_0$.

مثال (٥,١١)

للتوضيح نفترض سلسلة ماركوف المعطاة في المثال (٤,٣١) و المطلوب:

١- حساب الاحتمالات ν_{ij} لكل $i = 1,2$ و $j = 3,4,5$.

٢- وصف تفصيلي للمسلك التقاربي للاحتمالات $p_{ij}^{(n)}$ عندما $n \to \infty$.

الحل

١- لقد أوضحنا سلفًا أن فضاء الحالة لهذه السلسلة يمكن تقسيمه إلى ثلاث فصول متنافية مثنى مثنى: $S = E_0 + E_1 + E_2$ ، حيث إن:

$E_0 = \{1,2\}$ يكون فصلاً مفتوحاً من الحالات العابرة.

$E_1 = \{3,4\}$ يكون فصلاً مغلقاً من الحالات الارتدادية.

$E_2 = \{5\}$ يكون فصلاً مغلقاً من الحالات الارتدادية.

والآن نحسب الاحتمالات v_{ij} لكل $i = 1,2$ و $j = 3,4,5$

لأجل $i=1$: نلاحظ أن الانتقال من الحالة ١ إلى الحالة ٣ يكون له نفس احتمال الانتقال من الحالة ١ إلى الحالة ٤ ومن ثم فإن:

$$v_{13} = v_{14}$$

ونلاحظ أيضًا أن الانتقال من E_0 يمكن أن يكون إما إلى E_1 أو إلى E_2، ومن ثم فإن:

$$v_{15} = 1 - v_{13}$$

ومن ثم فإنه يكفي حساب احتمال واحد فقط من الاحتمالات ومنه يمكن استنتاج الاثنين المتبقيين باستخدام المعادلتين السابقتين. دعنا نحسب على سبيل المثال v_{15}. سنقوم بعمل ذلك بحساب $v_{15}(n)$ و $n = 1,2,\cdots$، لدينا:

(أ) $v_{15}(1) = p_{15} = 0.5$

(ب) $v_{15}(2) = 0$: لا يمكن للعملية أن تنتقل من الحالة 1 إلى الحالة 5 خلال خطوتين، أو خلال أي عدد زوجي من الانتقالات.

(ج) $v_{15}(3) = p_{15}(p_{12}\, p_{21})$: ستنتقل العملية مرة خلال الدورة (1−2−1) قبل الانتقال إلى الحالة 5، ... إلخ

(د) $v_{15}(n) = p_{15}(p_{12})^{\frac{n-1}{2}}(p_{21})^{\frac{n-1}{2}}$: ستنتقل العملية $(n-1)$ مرة خلال الدورة (1−2−1) قبل الانتقال إلى الحالة 5، وهذا يعني $\frac{(n-1)}{2}$ مرة خلال (1، 2) و $\frac{(n-1)}{2}$ مرة خلال (2، 1) وذلك فقط عندما تكون n عدداً فردياً.

ومن ثَم فإن:

إذا كانت $n = 2k$ ، $v_{15}(2k) = 0$

وإذا كانت $n = 2k+1$ ، $v_{15}(2k+1) = p_{15}(p_{12})^{\frac{2k+1-1}{2}}(p_{21})^{\frac{2k-1}{2}} = p_{15}\, p_{12}^{k} p_{21}^{k}$

ومن ثم فإن:

$$\begin{aligned}
v_{15} &= \sum_{n\ge1} v_{15}(n)\\
&= \sum_{k\ge1} v_{15}(2k) + \sum_{k\ge0} v_{15}(2k+1)\\
&= 0 + \sum_{k\ge0} p_{15}\, p_{12}^{k}\, p_{21}^{k}\\
&= 0.5 \sum_{k\ge0} \left[(0.3)(0.2)\right]^{k}\\
&= 0.5 \sum_{k\ge0} (0.6)^{k}\\
&= \frac{0.5}{1-0.6}\\
&= \frac{50}{94} < 1.
\end{aligned}$$

ومن ثَم فإن:

$$v_{13} = v_{14} = 1 - v_{15} = 1 - \frac{50}{94} = \frac{44}{94}$$

<u>لأجل i=2</u> : بالمثل لدينا في هذه الحالة:

$$v_{23} = v_{24} = 1 - v_{25}$$

دعنا نحسب v_{25} . لدينا:

(أ) $v_{25}(1) = 0$

(ب) $v_{25}(2) = p_{21}\, p_{15}$.

(ج) $v_{25}(3) = 0$.

(د) $v_{25}(4) = (p_{21})^{2}\, p_{12}\, p_{15}$ ، ... إلخ

(هـ) $v_{25}(n) = p_{15}\,(p_{21})^{\frac{n}{2}}\,(p_{12})^{\frac{n}{2}-1}$ ؛ وذلك فقط عندما تكون n عدداً زوجياً، $n = 2k$.

ومن ثَم فإن:

$$v_{25} = \sum_{n\ge2} (p_{21})^{\frac{n}{2}}\,(p_{12})^{\frac{n}{2}-1}\, p_{15}$$

$$= \sum_{k\geq 1} p_{15}\,(p_{12})^{-1}(p_{21}\,p_{12})^{k}$$
$$= \frac{15}{94} < 1.$$

ومن ثم نحصل على:

$$\nu_{23} = \nu_{24} = 1 - \nu_{25} = 1 - \frac{15}{94} = \frac{79}{94}$$

٢- المسلك التقاربي لسلسلة ماركوف. أولاً E_0 هي فصل من الحالات العابرة، ومن ثَم فإن $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$. المصفوفة $P^{\infty} = \lim_{n\to\infty} P^{n}$ تأخذ الصيغة التالية:

$$P^{\infty} = \begin{array}{c|ccc} & E_0 & E_1 & E_2 \\ \hline E_0 & 0 & III & IV \\ E_1 & 0 & II & 0 \\ E_2 & 0 & 0 & I \end{array}$$

حيث إن التجمعات I ، II ، III ، IV لم يتم حساها بعد، فيما يلي سنقوم بحساها.

<u>التجمع I</u> : الحالة 5 تكون حالة ماصة ومن ثم فهي ارتدادية، إذا دخل النظام هذه الحالة فإنه أبدًا لن يخرج منها ومن ثَم فإن $\lim_{n\to\infty} p_{55}^{(n)} = 1$. وبذلك فإنه يمكن تحديث المصفوفة P^{∞} لتصبح:

$$P^{\infty} = \begin{array}{c|ccc} & E_0 & E_1 & E_2 \\ \hline E_0 & 0 & III & IV \\ E_1 & 0 & II & 0 \\ E_2 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

<u>التجمع II</u>: لاحظ أن $E_1 = \{3,4\}$ تكون سلسلة جزئية، دعنا نوضح أن الحالة 3 ، ومن ثم الحالة 4 ؛ وذلك لأنهما متصلتين، تكون ارتدادية موجبة. لدينا :

$$\nu_{33} = 0.5 + \sum_{n\geq 2} (0.6)^{n-2}\,(0.5)\,(0.4) = 1$$

ومن ثَم فإن الحالة 3 تكون ارتدادية. دعنا نوضح الآن أنها موجبة، ولإثبات ذلك يكفي أن نوضح أن المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} n\,\nu_{33}(n) = \mu_3$ تكون تقاربية. لدينا:

$$\begin{aligned}\mu_3 &= \sum_{n\geq1} n\,v_{33}(n)\\ &= 0.5+\sum_{n\geq2} n\,(0.6)^{n-2}\,(0.5)\,(0.4)\\ &= 0.5+\frac{(0.5)(0.4)}{0.6}\sum_{n\geq1} n\,(0.6)^{n-1}\\ &= 0.5+\frac{(0.5)(0.4)}{0.6}\,\frac{1}{(1-0.6)^2}>0\end{aligned}$$

ومن ثَم فإن الحالة 3 موجبة ومن ثم تكون الحالة 4 أيضًا وبناء عليه فإن $E_1=\{3,4\}$ يكون فصلاً من الحالات موجبة الارتداد. ولحساب التوزيع الاحتمالي النهائي لحالات الفصل E_1 دعنا نعود إلى مصفوفة انتقال الاحتمالات الأصلية:

$$P=\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} & & 3 & 4 & \end{array}\\ \begin{array}{c}\\ \\ 3\\ 4\\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix}0 & 0.2 & 0 & 0.3 & 0.5\\ 0.3 & 0 & 0.7 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0\\ 0 & 0 & 0.4 & 0.6 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\end{array}$$

ودعنا نعتبر المصفوفة الجزئية المناظرة للحالتين 3 و 4. من الواضح أنها مصفوفة عشوائية تلازم سلسلة ماركوف غير مختزلة و غير دورية وموجبة الارتداد. يوضح الشكل (٥,١) رسمًا لهذه السلسلة. التوزيع الاحتمالي النهائي $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}=\pi_j$ لهذه السلسلة موجود ويحقق $\pi=\pi P$، $\pi e=1$. بحل نظام المعادلات التالية:

$$\begin{aligned}0.5\pi_3+0.4\pi_4 &= \pi_3\\ 0.5\pi_3+0.6\pi_4 &= \pi_4\\ \pi_3+\pi_4 &= 1\end{aligned}$$

نحصل على:

$$\pi_4=\frac{5}{9} \text{ و } \pi_3=\frac{4}{9}$$

يمكن تحديث المصفوفة P^∞ ولكن مازلنا نحتاج إلى حساب مجموعتين أخريين.

التجمع III: لدينا هنا:

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{v_{ij}}{\mu_j}$$

وأن:

$$\mu_j = \frac{1}{\pi_j}$$

وأيضًا $\mu_1 = \mu_3$ و $\mu_2 = \mu_4$، ومن ثَم فإن:

$$\lim_{n\to\infty} p_{13}^{(n)} = \frac{v_{13}}{\mu_3} = \left(\frac{44}{94}\right)\left(\frac{4}{9}\right) = 0.21 \text{ ،}$$

$$\lim_{n\to\infty} p_{14}^{(n)} = \frac{v_{14}}{\mu_4} = \left(\frac{44}{94}\right)\left(\frac{5}{9}\right) = 0.24$$

التجمع IV: بالمثل للتجمع III يمكن الحصول على $\pi_5 = 1$ ومن ثم فإن $\mu_5 = 1$.

وفي النهاية نحصل على المصفوفة P^∞ على الصورة التالية:

$$P^\infty = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{44}{90}\frac{4}{9} & \frac{50}{90}\frac{5}{9} & \frac{50}{90} \\ 0 & 0 & \frac{79}{94}\frac{4}{9} & \frac{15}{94}\frac{5}{9} & \frac{15}{94} \\ 0 & 0 & \frac{4}{9} & \frac{5}{9} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{9} & \frac{5}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & .21 & .24 & .55 \\ 0 & 0 & .34 & .08 & .15 \\ 0 & 0 & .45 & .55 & 0 \\ 0 & 0 & .45 & .55 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

مثال (٥,١٢)

بفرض أن $\{X_n\}$ سلسلة ماركوف بفضاء الحالة $S = \{1, 2, \cdots, 7\}$ ومصفوفة انتقال الاحتمالات:

$$P=\begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.7 & 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.5 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.3 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0 & 0.1 & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix}$$

إذن الحالتان 1 و 2 تكونان مجموعة مغلقة من الحالات غير المختزلة والحالات 3، 4، 5 تكون مجموعة مغلقة أخرى من الحالات غير المختزلة وأما الحالات المتبقية فهي حالات عابرة.

يمكن تطبيق النظرية (٥,٣) على المجموعات المغلقة من الحالات غير المختزلة بانفصال. ولذلك فإنه من أجل:

$$P_1=\begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.7 & 0.3 \end{pmatrix}$$

يمكن حساب التوزيع الاحتمالي النهائي بحل النظام $\pi=\pi P_1$ ، $\pi e=1$. وبعمل ذلك نحصل على:

$$(\pi_1,\pi_2)=\left(\frac{7}{15},\frac{8}{15}\right)$$

وبالمثل من أجل:

$$P_2=\begin{pmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.6 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

فإنه يمكن إيجاد التوزيع الاحتمالي النهائي:

$$(\pi_3,\pi_4\,\pi_5)=\left(\frac{6}{23},\frac{7}{23},\frac{10}{23}\right)$$

وباتباع الطريقة المقدمة في البند (٥,١) يمكن حساب v_{ij} ، لنحصل على:

$$\begin{pmatrix} v_{61} & \cdots & v_{65} \\ v_{71} & \cdots & v_{75} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 & 0.8 & 0.8 & 0.8 \\ 0.4 & 0.4 & 0.6 & 0.6 & 0.6 \end{pmatrix}$$

(نلاحظ أن هذه هي القيم التي نحتاجها) ومن ثَم وباستخدام نظريتي (٥,٢) و (٥,٣) نحصل على:

$$P^{\infty} = \lim_{n\to\infty} P^{n} = \begin{pmatrix} \frac{7}{15} & \frac{8}{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{7}{15} & \frac{8}{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6}{23} & \frac{7}{23} & \frac{10}{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6}{23} & \frac{7}{23} & \frac{10}{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6}{23} & \frac{7}{23} & \frac{10}{23} & 0 & 0 \\ \frac{1.4}{15} & \frac{1.6}{15} & \frac{4.8}{23} & \frac{5.6}{23} & \frac{8}{23} & 0 & 0 \\ \frac{2.8}{15} & \frac{3.2}{15} & \frac{3.6}{23} & \frac{4.2}{23} & \frac{6}{23} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

سلاسل ماركوف غير المحدودة Infinite Markov chains

سنقدم الآن مثالاً على المسلك التقاربي لسلاسل ماركوف غير المنتهية.

مثال (٥,١٣): (الخُطا العشوائية بحواجز ماصة)

لنفرض أن $\{X_n\}$ سلسلة ماركوف بفضاء الحالة $S=\{0,1,2,\cdots\}$ ومصفوفة احتمالات الانتقال:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ q & 0 & p & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & q & 0 & p & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & q & 0 & p & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

حيث إن $0<p<1$ ، $q=1-p$. تسمى هذه السلسلة بالمشي (الخُطا) العشوائي وتستخدم لوصف حركة شخص فاقد الوعي: إذا كان هذا الشخص عند الموضع i بعد عدد n من الخطوات فإن خطوته التالية تقوده إما إلى الموضع $i+1$ باحتمال p أو إلى الموضع $i-1$ باحتمال q ماعدا عندما $i=0$ فإنه يوجد هناك حاجز وعندما يصل هذا الشخص إلى ذلك الموضع فإنه من المؤكد أنه سيعود ثانية إلى الموضع ١.

يمكن الوصول من أي حالة إلى حالة أخرى ومن ثَم فإن السلسلة تكون غير مختزلة.

انطلاقًا من الحالة $i = 0$ فإن السلسلة يجب أن تقوم بعدد من الخطوات إلى اليسار مماثلة لعدد الخطوات إلى اليمين حتى تعود ثانية إلى الحالة $i = 0$. ومن ثَم فإن العودة إلى الحالـــة $i = 0$ يمكن أن يحدث فقط عند الخطوات الزوجية أي أن عندما $n = 2, 4, 6, \cdots$ ومن ثم فإن الحالة $i = 0$ تكون دورية بدورة مقدارها $d = 2$. وحيث إن السلسلة غير مختزلة إذن فهي تكون دورية بدورة مقدارها $d = 2$. والآن فإن جميع الحالات إما أن تكون عابرة وإما أن تكـــون صفرية الارتداد recurrent null وإما أن تكون موجبة الارتداد positive recurrent.

تأخذ المعادلة $\pi = \pi P$ الشكل التالي:

$$\begin{aligned}
\pi_0 &= q\pi_1 \\
\pi_1 &= \pi_0 + q\pi_2 \\
\pi_2 &= p\pi_1 + q\pi_3 \\
\pi_3 &= p\pi_2 + q\pi_3
\end{aligned}$$

، ... إلخ. بحل أول معادلة بالنسبة إلى π_1 والثانية بالنسبة إلى π_2 وهكذا الثالثة بالنسبة إلى π_3 والرابعة، ... إلخ، نحصل على:

$$\begin{aligned}
\pi_1 &= \frac{1}{q}\pi_0, \\
\pi_2 &= \frac{1}{q}\left(\frac{1}{q}\pi_0 - \pi_0\right) = \frac{p}{q^2}\pi_0, \\
\pi_3 &= \frac{1}{q}\left(\frac{p}{q^2} - \frac{p}{q}\right)\pi_0 = \frac{p^2}{q^3}\pi_0, \ldots
\end{aligned}$$

وبذلك يمكن كتابة الحل في الصورة التالية:

$$\pi_j = \frac{1}{q}\left(\frac{p}{q}\right)^{j-1}\pi_0 \,,\, j = 1, 2, \cdots$$

وذلك لثابت ما $\pi_0 \geq 0$.

١- إذا كان $p < q$ ، إذن $p/q < 1$ ومن ثَم فإن:

$$\sum_{j=0}^{\infty}\pi_j = \left[1 + \frac{1}{q}\sum_{j=1}^{\infty}(p/q)^{j-1}\right]\pi_0 = \left[1 + \frac{p}{q}\cdot\frac{1}{1-p/q}\right]\pi_0 = \frac{2q}{q-p}\pi_0$$

وباختيار:

$$\pi_0 = \frac{q-p}{2q} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{p}{q}\right)$$

يمكن أن نجعل $\sum \pi_j = 1$ ، ومن ثم فإنه عندما $p < q$ يكون:

$$\pi_j = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(1-\frac{p}{q}\right), & if\ j=0, \\ \frac{1}{2q}\left(1-\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p}{q}\right)^{j-1}, & if\ j \geq 1, \end{cases}$$

حلاً وفي هذه الحالة تكون جميع الحالات صفرية الارتداد.

٢- إذا كان $p \geq q$ ، إذن فإن جميع الحالات إما أن تكون صفرية الارتداد وإما أن تكون عابرة. يمكن توضيح أن:

(أ) إذا كانت $p = q$ فإن جميع الحالات تكون صفرية الارتداد.

(ب) إذا كانت $p > q$ فإن جميع الحالات تكون عابرة.

مثال (٥,١٤): (الخُطا العشوائية بحواجز عاكسة)

لنفرض أن $\{X_n\}$ سلسلة ماركوف بفضاء الحالة $S = \{0,1,2,\cdots\}$ ومصفوفة احتمالات الانتقال:

$$P = \begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 & \cdots \\ q & 0 & p & 0 & \cdots \\ 0 & q & 0 & p & \cdots \\ 0 & 0 & q & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

من الواضح أن هذه السلسلة تكون غير مختزلة وأن جميع حالاتها تكون غير دورية (من الواضح أن الحالة $i = 0$ تكون هكذا). تأخذ المعادلة $\pi = \pi P$ الشكل التالي:

$$\begin{aligned} \pi_0 &= q\pi_0 + q\pi_1 \\ \pi_1 &= p\pi_0 + q\pi_2 \\ \pi_2 &= p\pi_1 + q\pi_3 \end{aligned}$$

، ... الخ. ابتداء بـــ $\pi_0 = 1$ فإن المعادلات الأولى والثانية والثالثة،...، إلخ تعطـــي علـــى الترتيب:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \frac{p}{q}, \\ \pi_2 &= \frac{\frac{p}{q} - q}{q} = \frac{p^2}{q^2}, \\ \pi_3 &= \frac{\frac{p^2}{q^2} - p \cdot \frac{p}{q}}{q} = \frac{p^3}{q^3}, \cdots \end{aligned}$$

ومن ثم فإن:

$$\pi = \left(1, \frac{p}{q}, \frac{p^2}{q^2}, \frac{p^3}{q^3}, \cdots\right)$$

يكون حلاً للنظام $\pi = \pi P$ وأن أي حل آخر يأخذ الصورة:

$$\pi = \left(c, \frac{cp}{q}, \frac{cp^2}{q^2}, \frac{cp^3}{q^3}, \cdots\right)$$

حيث إن c كمية ثابتة.

إذا كان $p \geq q$ ، إذن مجموع حدود أي حل إما أن يكـــون محـــدوداً (إذا أخـــذنا $c \neq 0$) وإما أن يكون صفرًا (إذا أخذنا $c = 0$). وفي كلتا الحالتين فإن المجموع لن يساوي ١، ومن ثم فإن نظام المعادلات $\pi = \pi P$ و $\pi e = 1$ لن يكون له حل.

وفي المقابل إذا كان $p < q$ ، إذن بأخذ $c = 1 - \frac{p}{q}$ يمكن الحصول على حل لنظـــام المعادلات $\pi = \pi P$ و $\pi e = 1$. وفي هذه الحالة فإن جميع الحالات تكون ارتداديـــة غـــير صفرية و غير دورية، وأن:

$$\lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)} = \left(1 - \frac{p}{q}\right)\left(\frac{p}{q}\right)^j, \; j = 0,1,2,\cdots$$

مثال (٥,١٥)

بالعودة إلى مسألة زمن الحياة المتبقي (مثال (٢,٢٦))، انظر أيضًا الأمثلـــة (٤,٢٣)،

(٤,٢٩)، (٤,٣٨). الصيغة المفتوحة للنظام $\pi = \pi P$ تأخذ الشكل التالي:

$$\begin{aligned} \pi_0 &= p_1\pi_0 + \pi_1 , \\ \pi_1 &= p_2\pi_0 + \pi_2 , \\ \pi_2 &= p_3\pi_0 + \pi_3 ,\cdots \end{aligned}$$

بأخذ $\pi_0 = 1$ وبحل هذه المعادلات بالتعاقب نحصل على الحل:

$$\begin{aligned} v_0 &= 1, \\ v_1 &= 1 - p_1, \\ v_2 &= 1 - p_1 - p_2 ,\cdots \end{aligned}$$

من الممكن أن نعاير هذا الحل لنحصل على حل للمعادلات $\pi = \pi P$، $\pi e = 1$ إذا وفقط إذا كان المقدار التالي محدوداً:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} v_j &= (p_1 + p_2 + p_3 + \cdots) + (p_2 + p_3 + \cdots) + (p_3 + \cdots) + \cdots \\ &= p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \cdots = \Delta \end{aligned}$$

نلاحظ أن المقدار Δ هو متوسط زمن حياة عنصر من العناصر، ومن ثَم فإنه إذا كان متوسط زمن الحياة غير محدود فإن جميع الحالات تكون صفرية الارتداد وأن $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$. ومن جهة أخرى إذا كان متوسط زمن الحياة Δ محدوداً فإن جميع الحالات تكون غير صفرية الارتداد، وأن:

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{1}{\Delta}(1 - p_1 - p_2 - \cdots - p_j), i, j \in S.$$

(٤,٥) السلاسل الدورية

Periodic chains

اضطررنا إلى ترك مناقشة الاحتمالات النهائية للحالات الدورية وذلك بسبب بعض الصعوبات التي تقود إلى صعوبة ظهور النتائج البسيطة. فيما يلي سنهتم فقط بدراسة الحالات الدورية الارتدادية. قد بينا في الفصل الرابع (الخوارزمية ٤,١) أنه يمكن تقسيم الحالات الارتدادية إلى مجموعات مغلقة متنافية مثنى مثنى C_1، C_2، ... . كل من هذه المجموعات

تعرف سلسلة ماركوف غير مختزلة بحالات ارتدادية. ومن ثم فإنه يكفينا أن نعتبر (ندرس) سلاسل ماركوف غير المختزلة بحالات ارتدادية دورية periodic recurrent states. وبناء على نظرية (٤,٩) فإن جميع الحالات يكون لها نفس الدورة.

تقسيم S إلى فصول جزئية دائرية Division of S into cyclic sub-classes

دعنا نأخذ حالة معينة $i_0 \in S$ وبفرض أن السلسلة لها دورة قدرها d، وبتعريف الفصول الجزئية C_1، C_2، ...، C_d كما يلي:

$$\begin{aligned}
C_1 &= \left\{j \in S : p_{i_0 j}^{(n)} > 0 \Rightarrow n = 1 (\operatorname{mod} d)\right\} \\
C_2 &= \left\{j \in S : p_{i_0 j}^{(n)} > 0 \Rightarrow n = 2 (\operatorname{mod} d)\right\} \\
\vdots & \quad \vdots \\
C_d &= \left\{j \in S : p_{i_0 j}^{(n)} > 0 \Rightarrow n = d = 0 (\operatorname{mod} d)\right\} = C_0
\end{aligned}$$

نلاحظ أن التجمع $\{C_1, C_2, \cdots, C_d\}$ يكون تجزيء لـ S، حيث إن:

$$C_i \cap C_j = \Phi, i \neq j \text{ و } S = C_1 + C_2 + \cdots + C_d$$

وبناء على هذا التجزيء فإنه يمكن القول بأنه إذا كان النظام في الحالة s عند اللحظة n، فإنه سينتقل إلى الحالة $s+1$ عند اللحظة $n+1$، دعنا نبرهن على صحة هذا الزعم. بفرض أن $X_n = i \in C_s$ دعنا نوضح أن $X_{n+1} = j \in C_{s+1}$. لدينا $p_{ii_0} > 0$ ومن ثَم فإن $n = s \operatorname{mod} d$ ومنها فإن $n+1 = s+1 \operatorname{mod} d$. والآن:

$$p_{i_0 j}^{(n+1)} > p_{i_0 i}^{(n)}\, p_{ij} > 0$$

ومن ثم فإن $0 < p_{i_0 j}^{(n+1)}$ إذا كان $n+1 = s+1 \operatorname{mod} d$، أي أن $p_{i_0 j}^{(n)} > 0$ إذا كان $n = s+1 \operatorname{mod} d$، أي أن $j \in C_{s+1}$.

مثال (٥,١٦)

بالعودة إلى المثال (٤,٣٢). سوف نستخدم الرمز * ليمثل التجمعات غير الصفرية ونرمز بـ 0 للتجمع الصفري (التجمع يعني مصفوفة جزئية من المصفوفة قيد الدراسة - التجمع الصفري عبارة عن مصفوفة جزئية جميع عناصرها أصفار، أما التجمع غير الصفري فهو مصفوفة جزئية تحتوي على الأقل على عنصر واحد غير صفري):

$$P=\begin{pmatrix}0&*\\ *&0\end{pmatrix}\text{ ، }P^2=\begin{pmatrix}*&0\\0&*\end{pmatrix}\text{ ، }P^3=\begin{pmatrix}0&*\\ *&0\end{pmatrix}\text{ ، }P^4=\begin{pmatrix}*&0\\0&*\end{pmatrix}$$

عمومًا إذا كانت سلسلة ماركوف لها الدورة d ، إذن فإن الانتقال الوحيد المحتمل في خطـوة واحدة سيكون من C_s إلى C_{s+1} والانتقال الوحيد في خطوتين سـيكون مـن C_{s+1} إلى C_{s+2} ... إلخ، وأن القوى المتتابعة لمصفوفة الانتقالات ستأخذ الشكل التالي:

$$P=\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc}1&2&3&4&\cdots&d-1&d\end{array}\\ \begin{array}{c}1\\2\\3\\4\\\vdots\\d-1\\d\end{array} & \begin{pmatrix} &*&&&&&\\ &&*&&&&\\ &&&*&&&\\ &&&&&&\\ &&&&&&\\ &&&&&&*\\ *&&&&&&\end{pmatrix}\end{array}$$

$$P^2=\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc}1&2&3&4&\cdots&d-1&d\end{array}\\ \begin{array}{c}1\\2\\3\\4\\\vdots\\d-1\\d\end{array} & \begin{pmatrix} &&*&&&&\\ &&&*&&&\\ &&&&&&\\ &&&&&&\\ &&&&&&\\ *&&&&&&\\ &*&&&&&\end{pmatrix}\end{array}\text{ ، ... ،}$$

$$
P^{d-1} = \begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & d-1 & d \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \vdots \\ d-1 \\ d \end{array} &
\left(\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & * \\
* & & & & & & \\
 & * & & & & & \\
 & & * & & & & \\
 & & & * & & & \\
 & & & & & & \\
 & & & & & * &
\end{array}\right)
\end{array}
،$$

$$
P^{d} = \begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & d-1 & d \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \vdots \\ d-1 \\ d \end{array} &
\left(\begin{array}{ccccccc}
* & & & & & & \\
 & * & & & & & \\
 & & * & & & & \\
 & & & * & & & \\
 & & & & & & \\
 & & & & & * & \\
 & & & & & & *
\end{array}\right)
\end{array}
$$

وأن $P^d = P^1$ ، $P^{kd+s} = P^s$ لكل $k \geq 0, 1 \leq s \leq d$.

مثال (٥,١٧)

في لعبة الكروت يتم توزيع الكروت على أربعة أشخاص 1، 2، 3، 4 بواسطة أحد اللاعبين والذي يسمى بالموزع. ليكن X_n يشير إلى رقم الموزع. صنف وفسر النتائج التقاربية في الحالتين التاليتين:

١- كل لاعب سيلعب مع نفسه والتوزيع بالدور.

٢- عندما يفوز الموزع سيوزع مرة ثانية واللعب بالدور، حيث إن احتمال فوز اللاعب رقم i هو $p_i = \frac{i}{10}$.

الحل

١- يوضح الشكل (٥,١) رسماً يمثل انتقالات سلسلة ماركوف التي تصف هذه المسألة. لدينا فصل واحد مغلق من الحالات موجبة الارتداد (لماذا؟). هذه السلسلة تكون دورية ولدينا $d = 2$. ولتقسيم السلسلة إلى فصول جزئية دائرية، نحسب القوى المتعاقبة P^2، P^3، ...، P^d. لدينا:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ، \quad P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} ،$$

$$P^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} ، \quad P^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ومن ثَم فإن $S = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ وأن $C_i = \{i\}$ ولـــدينا الاحتمـــالات النهائية $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{4n+s}, s = 0,1,2,3$ التالية:

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{4n} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & \text{otherwise}, \end{cases} \quad : \ s = 0$$

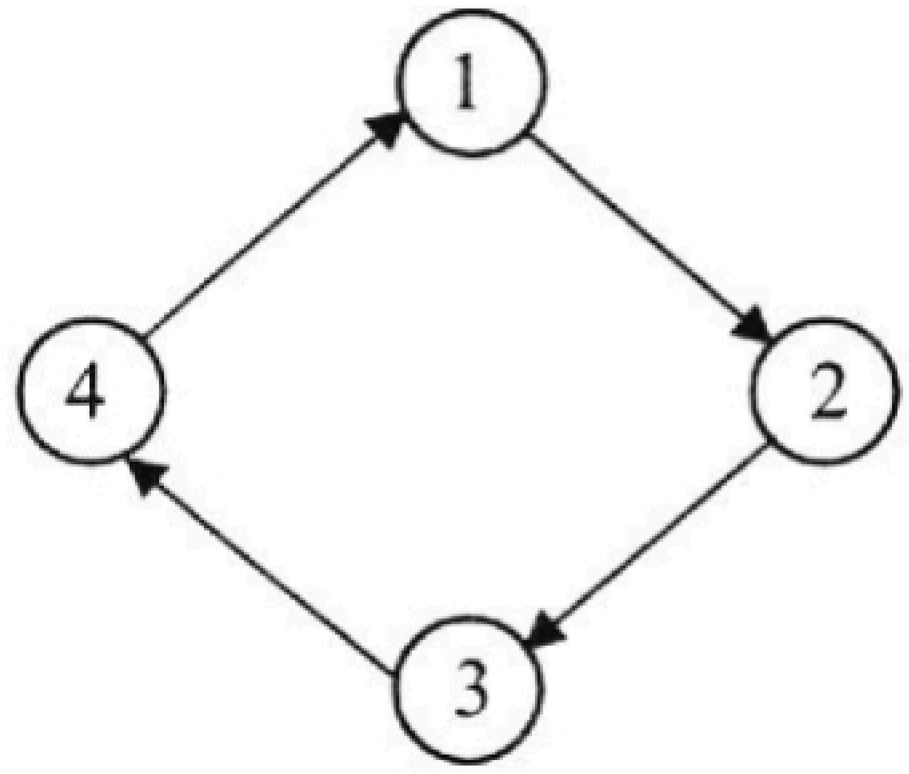
$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{4n+1} = \begin{cases} 1, & j = i+1, i = 1,2,3 \text{ or } j = 1, i = 4, \\ 0, & \text{otherwise}, \end{cases} \quad : \ s = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{4n+2} = \begin{cases} 1, & j = i+2, i = 1,2 \text{ or } j = i+2, i = 3,4, \\ 0, & \text{otherwise}, \end{cases} \quad : \ s = 2$$

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{4n+3} = \begin{cases} 1, & j=4, i=1 \text{ or } j=i-3, i=2,3,4, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases} \quad : \; s=3$$

وبطريقة أخرى:

$$P^{4n+3} = P^3 \;،\; P^{4n+2} = P^2 \;،\; P^{4n+1} = P^1 \;،\; P^{4n} = P^4$$

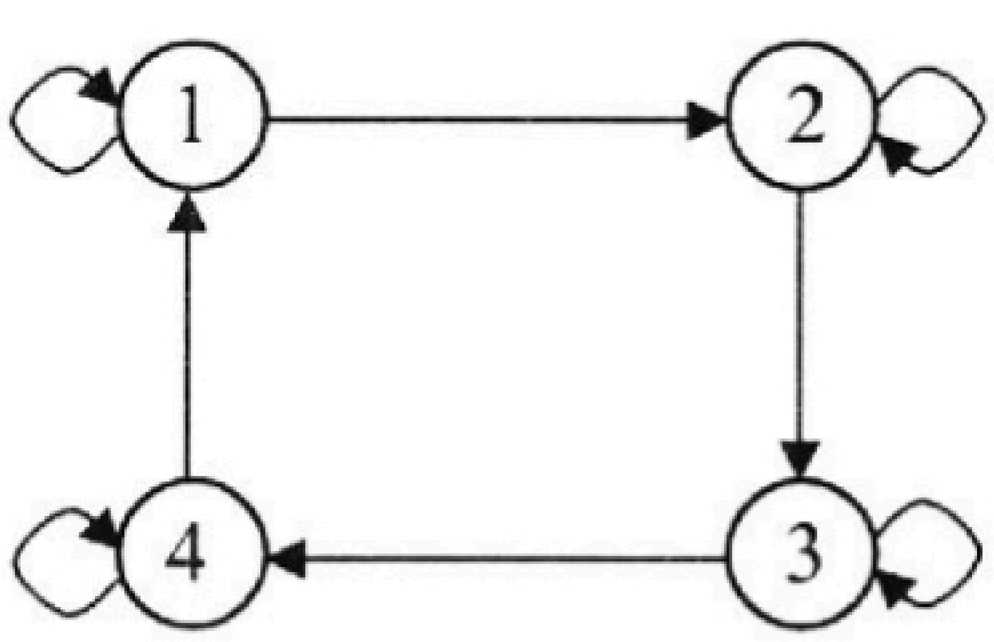


شكل (٥,١): التمثيل البياني لسلسلة ماركوف في مثال (٥,١٧) في الحالة الأولى.

٢- يوضح الشكل (٥,٢) رسمًا يمثل انتقالات سلسلة ماركوف التي تصف هذه المسألة في الحالة الثانية. لدينا فصل واحد مغلق من الحالات غير الدورية موجبة الارتداد. ومن ثَم يوجد توزيع نهائي وحيد π بحيث إن $\pi = \pi P$، $\pi e = 1$.

بإجراء بعض الحسابات البسيطة نحصل على:

$$\pi = \left(\frac{56}{275}, \frac{63}{275}, \frac{72}{275}, \frac{84}{275}\right)$$



شكل (٥,٢): التمثيل البياني لسلسلة ماركوف في مثال (٥,١٧) في الحالة الثانية.

سلاسل ماركوف غير المحدودة Infinite Markov chains

سنقدم الآن مثالاً على المسلك التقاربي لسلاسل ماركوف الدورية غير المحدودة.

مثال (٥,١٨)

لنفرض أن سلسلة ماركوف المعطاة في المثال (٥,١٤) لأجل $p < q$. بينا أن جميع الحالات تكون موجبة الارتداد ودورية بدورة مقدارها $d = 2$. الفصول الدورية هي $C_1 = \{0, 2, 4, \cdots\}$ ، $C_2 = \{1, 3, 5, \cdots\}$ (نقصد بالفصول الدورية هنا أن السلسلة تنتقل من حالة من الفصل C_1أو C_2 إلى حالة من الفصل الآخر وتستمر عملية الانتقال بشكل دوري بين هذين الفصلين). حصلنا على حل للنظام $\pi = \pi P$ على النحو التالي:

$$\begin{aligned} &\pi_0 = 1, \quad \pi_2 = \tfrac{p}{q^2}, \quad \pi_4 = \tfrac{p^3}{q^4}, \quad \cdots \\ &\pi_2 = \tfrac{1}{q}, \quad \pi_3 = \tfrac{p^2}{q^3}, \quad \pi_5 = \tfrac{p^4}{q^5}, \quad \cdots \end{aligned}$$

وللمعايرة، لدينا:

$$\sum_i \pi_i = 1 + \frac{1}{q}\left[1 + \frac{p}{q} + \left(\frac{p}{q}\right)^2 + \cdots\right] = 1 + \frac{1}{q}\frac{1}{1-\frac{p}{q}} = \frac{2}{1-\frac{p}{q}}$$

بضرب كل حد في المقدار $1-\frac{p}{q}$. ومن ثَم فإن التوزيع النهائي الممثل للفصلين C_1 ، C_2 يصبح على الترتيب:

$$(\pi_0, \pi_2, \pi_4, \cdots) = \left(1-\frac{p}{q}\right)\left(1, \frac{p}{q^2}, \frac{p^3}{q^4}, \cdots\right)$$

$$(\pi_1, \pi_3, \pi_5, \cdots) = \left(1-\frac{p}{q}\right)\left(\frac{1}{q}, \frac{p^2}{q^3}, \frac{p^4}{q^5}, \cdots\right)$$

ومن ثم فإن:

$$\lim_{n\to\infty} P^{2n} = \left(1-\frac{p}{q}\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{p}{q^2} & 0 & \frac{p^3}{q^4} & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{1}{q} & 0 & \frac{p^2}{q^3} & 0 & \frac{p^4}{q^5} & \cdots \\ 1 & 0 & \frac{p}{q^2} & 0 & \frac{p^3}{q^4} & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{1}{q} & 0 & \frac{p^2}{q^3} & 0 & \frac{p^4}{q^5} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}،$$

$$\lim_{n\to\infty} P^{2n+1} = \left(1-\frac{p}{q}\right)\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{q} & 0 & \frac{p^2}{q^3} & 0 & \frac{p^4}{q^5} & \cdots \\ 1 & 0 & \frac{p}{q^2} & 0 & \frac{p^3}{q^4} & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{1}{q} & 0 & \frac{p^2}{q^3} & 0 & \frac{p^4}{q^5} & \cdots \\ 1 & 0 & \frac{p}{q^2} & 0 & \frac{p^3}{q^4} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

(٥,٥) تمارين

(٥,١) احسب الاحتمالات v_{ij} لكل وصول إلى j من i لسلاسل ماركوف بـ م.ح.ن. التالية:

١- $P = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 & 0 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

٢- $P = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.4 & 0.1 \end{pmatrix}$

٣- $P = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.3 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$

٤- $P = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.4 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.2 & 0.3 & 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$

(٥,٢) بالعودة ثانية إلى تمرين (٢,٢٩) احسب التوزيع $\{v_{ij}(n); n=1,2,\cdots\}$ لزمن المرور الأول من الحالة i إلى الحالة j لأجل $(i,j)=(w,b)$ و $(i,j)=(b,b)$.

(٥,٣) بالعودة إلى سلسلة ماركوف بالحالتين المقدمة في مثال (٣,٤):

١- وضح أن متوسطات أزمنة المرور الأولى تُعطى بـــ:

$$\mu_{11} = 1+\frac{\beta}{\alpha} \text{ ، } \mu_{10} = \frac{1}{\beta} \text{ ، } \mu_{01} = \frac{1}{\alpha} \text{ ، } \mu_{00} = 1+\frac{\alpha}{\beta}$$

٢- استنتج صيغ π_0 ، π_1 ثم اختبر أن هذه النتائج تتفق مع النتائج المقدمة في مثال

(٣,٤).

(٥,٤) تعمل مُعَدَّة لإنتاج نبات صناعي معظم الوقت. ستعمل هذه المُعَدَّة في اليوم التالي لليوم الذي تعمل فيه باحتمال 0.9 وخلاف ذلك، فإنه في اليوم التالي لليوم الذي يتم فيه إصلاح المُعَدَّة سيتم اختبار المُعَدَّة لتعاود عملها بشكل سليم. ارسم سلسلة ماركوف التي تصف حالات الماكينة: (0) المُعَدَّة تعمل، (1) المُعَدَّة تحت الإصلاح، (2) المُعَدَّة تحت الاختبار.

١- أوجد متوسطات الانتقالات الأولى μ_{00}، μ_{11}، μ_{22}.

٢- أوجد الاحتمالات النهائية π_0، π_1، π_2.

(٥,٥) لنفرض وجود مخزنين 1، 2. دائمًا يبيع المخزن 1 سلعته إما بـ 10 ريالات أو بـ 20 ريالاً. وإذا باع المخزن 1 في يوم ما بـ 10 ريالات فإنه سيبيع في اليوم التالي بـ 10 ريالات باحتمال 0.8. وإذا باع يومًا ما بـ 20 ريالاً فإن احتمال أن يبيع في اليوم التالي بـ 20 ريالاً هو 0.9. أما المخزن 2 فدائمًا يبيع إما بـ 10 ريالات أو بـ 25 ريالاً. وإذا باع المخزن 2 في يوم ما بـ 10 ريالات فإنه سيبيع في اليوم التالي بـ 10 ريالات باحتمال 0.9. وإذا باع يومًا ما بـ 25 ريالاً فإن احتمال أن يبيع في اليوم التالي بـ 25 ريالاً هو 0.85. ما هو المخزن الذي سيبيع بأكبر سعر في المتوسط؟ أوجد تفسيرًا لجميع متوسطات أزمنة المرور الأولى.

(٥,٦) احسب التوزيع الاحتمالي النهائي لسلاسل ماركوف :

١- في المثال (٢,٣١)

٢- في المثال (٢,٣٤).

(٥,٧) احسب التوزيع الاحتمالي النهائي لسلسلة ماركوف بفضاء الحالة $S = \{a, b, c, d, e\}$ و م.ح.ن.

$$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

(٥,٨) لنفرض أن سلسلة ماركوف بفضاء الحالة $S=\{1,2,\cdots,10\}$ و م.ح.ن.

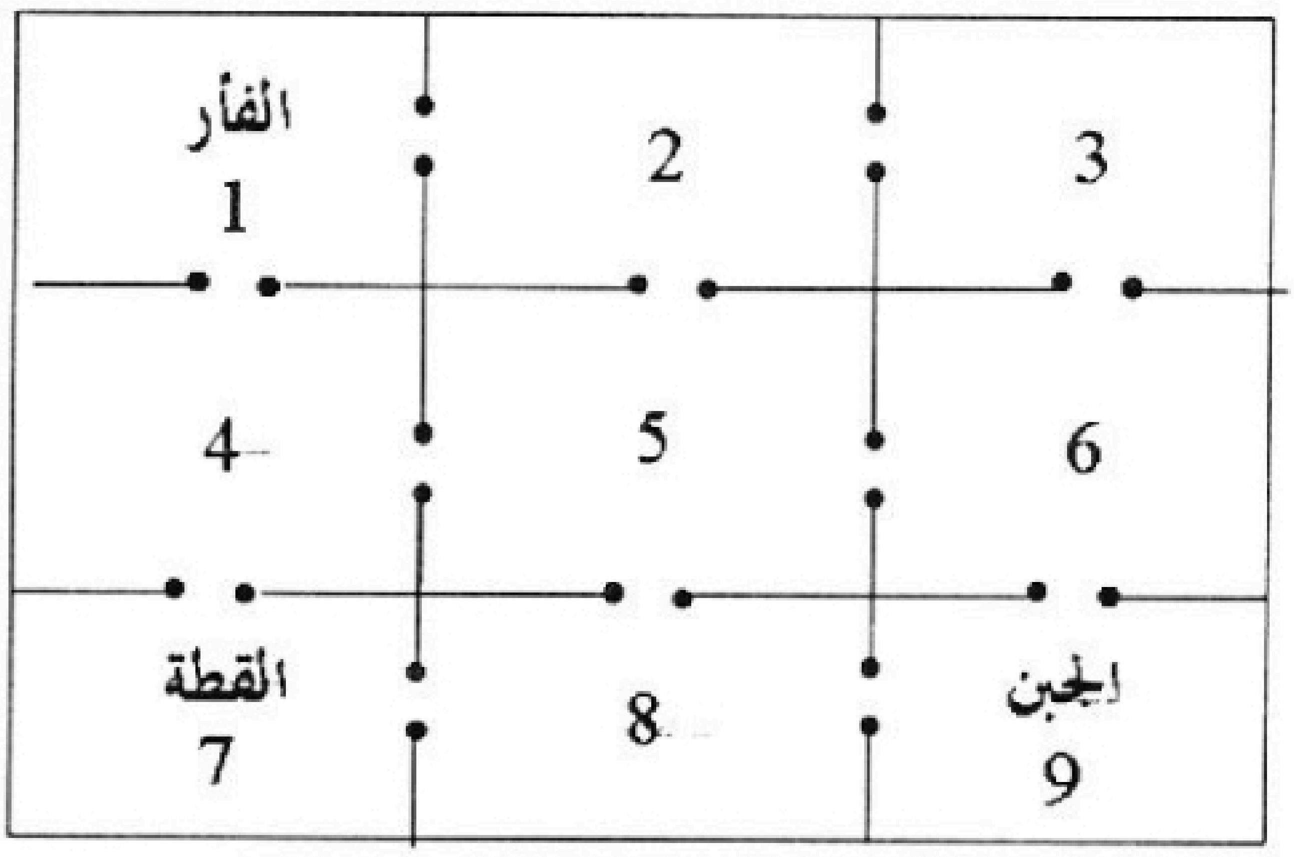
$$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

١- احسب الاحتمالات v_{ij} من أجل جميع $i,j\in S$ ولجميع الحالات j التي يمكن الوصول إليها من الحالة i.

٢- احسب التوزيع النهائي $\lim_{n\to\infty}(X_n=j\mid X_0=i)$ لأجل $j\in S$ ولجميع الحالات الابتدائية $i\in S$.

٣- أوجد متوسط زمن الارتداد إلى كل حالة.

(٥,٩) فأر في متاهة (أو فخ). بالعودة للفأر في المثال (٤,١٧) لنفرض أن المتاهة تأخذ الشكل الموضح في شكل (٥,٣). ولنفرض أيضًا أن الفأر بدأ من الخلية رقم 1.



شكل (٥,٣): فأر في متاهة.

١- وضح أن $\{X_n\}$ تكون سلسلة ماركوف. أوجد فضاء الحالة لهـــذه السلـــسلة وأوجد م.ح.ن. والاحتمالات الابتدائية لها $p^{(0)}$.

٢- أثبت أن $v_{13} = 0.4286$ ، $v_{17} = 0.6$ ، $v_{19} = 0.4$.

٣- بين بدون حسابات أن $v_{37} = 0.6$ ، $v_{39} = 0.4$.

(٥,١٠) لنعد إلى التمرين (٤,١١):

١- احسب $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$.

٢- ما هي المُعَدَّة التي ستعطى الأولوية.

(٥,١١) لنفرض أن سلسلتي ماركوف بفضاء الحالة $E = \{1,2,3,4\}$ و مصفوفتي احتمالات الانتقال المعطاة بــ :

$$A = \begin{pmatrix} p & 0 & q & 0 \\ 0 & p & 0 & q \\ q & 0 & p & 0 \\ 0 & q & 0 & p \end{pmatrix} \text{ ، } B = \begin{pmatrix} p & 0 & q & 0 \\ p & 0 & 0 & q \\ q & p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p \end{pmatrix}$$

حيث إن $0 < p,q < 1$ ، $p+q=1$.

١- صنف حالات سلسلة ماركوف A .

٢- احسب الاحتمالات v_{ij} لسلسلة ماركوف B .

٣- وضح أن $v_{ij} \geq v_{ik}\, v_{kj}$ من أجل i, j, k .

(٥,١٢) ادرس سلسلتي ماركوف بفضاء الحالة $E = \{1,2,3,4,5\}$ و مصفوفات احتمالات الانتقال المعطاة بـــ :

$$B = \begin{pmatrix} 0.2 & 0 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0 & 0.3 & 0.4 \\ 0.2 & 0.1 & 0.3 & 0.2 & 0.2 \end{pmatrix} \text{ ، } A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0.1 & 0.6 \\ 0.2 & 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0 & 0.3 & 0.4 \\ 0.2 & 0.1 & 0.3 & 0.2 & 0.2 \end{pmatrix}$$

١- وضح بالرسم والرسم المختزل كل سلسلة.

٢- صنف حالات كل سلسلة.

٣- احسب الاحتمال v_{33} لسلسلة ماركوف A .

٤- احسب A^{∞} ، B^{∞} .

(٥,١٣) يقوم قسم من أسطول جوي، مكون من أربع طائرات، بمهمات يومية على مقاطعة للعدو حيث يمكن حدوث بعض الخسائر أثناء القيام بهذه المهمات. تتم المهمة اليومية إذا كان متاحاً على الأقل ثلاث طائرات في الصباح. ومن جهة أخرى، إذا كان عدد الطائرات المتاحة في مساء اليوم السابق اختزل إلى 2 أو أقل فيتم استعارة طـــائرة في الليل من قسم من أسطول جوي مجاور. احتمال تدمير طائرة أثناء القيام بالمهمة هو $\frac{1}{3}$. ادرس تطور هذا النظام.

(٥,١٤) احسب التوزيع المستقر للسلسلة في التمرين (٤,١٢).

(٥,١٥) احسب التوزيع المستقر لسلسلة ماركوف بمصفوفة احتمالات الانتقال التالية:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

وأيضًا ادرس خواص عدم الاختزال وغير الدورية والارتداد لحالات هذه السلسلة.

(٥,١٦) بالعودة إلى مثال (٥,١٧)، وبفرض وجود فريقين، الفريق الأول يتكون من اللاعبين

١، و٢ أما اللاعبان ٣، و٤ فينتميان إلى الفريق الثاني. يوضح الجدول احتمالات فوز وخسارة كل فريق. صف وفسر النتائج التقاربية.

جدول (٥,١): احتمالات الفوز.

الفريق الأول		الفريق الثاني	
اللاعب 1	اللاعب 2	اللاعب 3	اللاعب 4
0.3	0.7	0.4	0.6

(٥,١٧) بالعودة إلى المثال (٢,١٤) و بفرض أن احتمال الجواب الصحيح لكل طفل يساوي 1/2:

١- وضح أن $\{X_n\}$ تكون سلسلة ماركوف بفضاء الحالة $S=\{0,1,\cdots,7\}$ وأن احتمالات الانتقالات هي $p_{i,i-1}=p_{i,i+1}=\frac{1}{2}$ لأجل $i=1,\cdots,6$ وأن $p_{0,0}=p_{7,7}=1$.

٢- احسب الاحتمال $f(i)=v_{i0}$ للطفل A لجميع حالات عدد المكعبات الابتدائي i.

(٥,١٨) سلسلة غير مختزلة لماركوف لها فضاء الحالة $S=\{1,\cdots,5\}$ ومصفوفة احتمالات الانتقال:

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.8 & 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ادرس المسلك التقاربي لها.

(٥,١٩) ادرس المسلك التقاربي لسلسلة ماركوف غير المختزلة بفضاء الحالة $S=\{1,\cdots,7\}$ ومصفوفة احتمالات الانتقال:

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(٥,٢٠) اعتبر سلسلة ماركوف - برنوللي $\{X_n\}$ بحالتين $S=\{0,1\}$ ومصفوفة احتمالات الانتقال التالية:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \quad 0 & \qquad\qquad 1 \end{array} \\ P=\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{pmatrix} 1-(1-c)\alpha & (1-c)\alpha \\ (1-c)(1-\alpha) & c+(1-c)\alpha \end{pmatrix} \end{array}$$

حيث إن $0<c<1$، وبأخذ $p_n=P(X_n=1)$ من أجل $n\geq 0$. وضح باستخدام النتائج المعطاة في المثال (٣,٤) أن:

$$p_n=\alpha+c^n(p_0-\alpha), n\geq 1$$

(٥,٢١) احسب الاحتمالات المستقرة للتمرين (٢,١٨)، إذا كانت موجودة.

الباب الثاني

عمليات ماركوف

- عمليات الولادة والوفاة
- عملية بواسون
- عمليات لا ولادة ولا وفاة

الفصل السادس

عمليات الولادة والوفاة
Birth-and-Death Processes

(٦,١) مقدمة

درسنا في الجزء الأول من هذا الكتاب عمليات ماركوف بفضائي حالة ومعلمة متقطعين. أما في الفصل الحالي والفصول القادمة من هذا الكتاب فسندرس أمثلة متنوعة لعمليات ماركوف بفضاء حالة متقطع وفضاء معلمة متصل. وبشكل أكثر وضوحًا سنتعامل مع عائلة المتغيرات العشوائية $\{X(t); 0 \leq t < \infty\}$ ، حيث إن $X(t)$ متغير عشوائي يأخذ قيمًا صحيحة غير سالبة. وسنتقيد في دراستنا بعمليات ماركوف $\{X(t)\}$ باحتمالات انتقال مستقرة. ومن ثَم فإن دالة احتمال الانتقال لأي $t > 0$:

$$p_{ij}(t) = P\big(X(t+u) = j \mid X(u) = i\big),\ i, j = 0,1,\cdots$$

لا يعتمد على $u \geq 0$.

(٦,٢) عملية الولادة الخالصة
Pure birth process

لنفرض أن العملية العشوائية $\{X(t)\}$ تصف نظاماً بعدد غير منتهٍ من الحالات الممكنة مع الزمن. ولنفرض أنه إذا كان النظام في الحالة n عند اللحظة $t > 0$ إذن لأي قيمة صغيرة

$h > 0$ فإنه عند اللحظة $t+h$ يمكن للنظام أن ينتقل إلى الحالة $n+1$ أو يبقى في الحالة n. يسمى الانتقال من الحالة n إلى الحالة $n+1$ بالولادة birth.

يمكن تفسير $X(t)$ على أنه عدد أفراد مجتمع ما في مكان معين عند اللحظة t. وبفرض أن حجم المجتمع يزداد نتيجة الولادة بناء على القواعد التالية:

١- المواليد التي تحدث في فترات زمنية مختلفة تكون مستقلة عن بعضها.

٢- عندما يكون في المجتمع عدد n من الأشخاص عند اللحظة الزمنية t، فإن:

(أ) احتمال ولادة واحدة في الفترة $(t, t+h) = \lambda_n h + o(h)$.

(ب) احتمال أكثر من ولادة واحدة في الفترة $(t, t+h) = o(h)$.

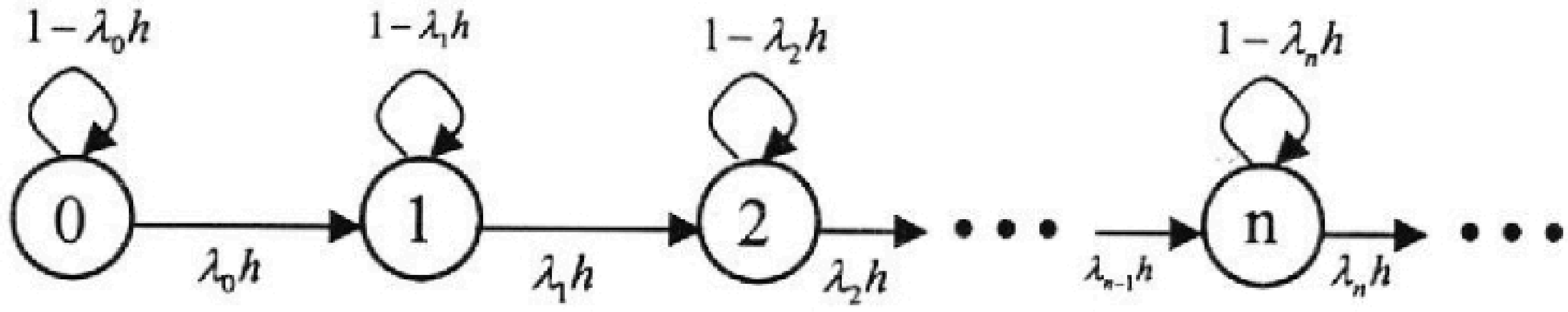
هنا المقدار $o(h)$ عبارة عن كمية تؤول إلى الصفر أسرع من أن تؤول الكمية h إلى الصفر بحيث إن:

$$\lim_{h \to 0} \frac{o(h)}{h} = 0$$

إذا كان $p_{ij}(t)$ يشير إلى احتمال تغير عدد أفراد المجتمع من العدد i عند اللحظة t إلى العدد j عند اللحظة $t+h$، إذن وبحذف الحدود $o(h)$ فإن مصفوفة انتقال الاحتمالات تأخذ الصورة التالية:

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 & n & \cdots \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \cdots \\ n-1 \\ n \\ \vdots \end{array} & \begin{pmatrix} 1-\lambda_0 h & \lambda_0 h & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1-\lambda_1 h & \lambda_1 h & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1-\lambda_2 h & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-\lambda_{n-1} h & \lambda_{n-1} h & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1-\lambda_n h & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \end{array}$$

بناء على القاعدتين (أ) ، (ب) يمكن حساب احتمال أنه لا يوجد ولادة في الفترة الزمنية $(t, t+h)$ عندما يكون حجم المجتمع n هو $1-\lambda_n h + o(h)$. يوضح الشكل (٦،١) الرسم البياني لهذه العملية العشوائية.



شكل (٦,١): الرسم البياني لعملية الولادة الخالصة.

سنهتم في هذا الفصل بدراسة توزيع حجم المجتمع عند اللحظة الزمنية t، ولعمل ذلك سنشير بـ $p_n(t)$ إلى احتمال أن حجم المجتمع هو n عند اللحظة t، أي أن $p_n(t) = P(X(t) = n)$. وعمومًا فإنه من المستحيل استنتاج صيغة مغلقة (صريحة) للاحتمال $p_n(t)$ إلا في حالات خاصة جدًا. وعادة يمكن استنتاج مجموعة من المعادلات التفاضلية كما سنرى لاحقًا. وبناء على تعريف مصفوفة احتمالات الانتقال، فإن متجه احتمالات الحالات عند اللحظة t يرتبط بمتجه احتمالات الانتقال عند اللحظة $t+h$ بالعلاقة التالية:

$$(p_0(t+h), p_1(t+h), \cdots, p_n(t+h), \cdots) = (p_0(t), p_1(t), \cdots, p_n(t), \cdots)P$$

والتي يمكن كتابتها بالتفصيل كما في معادلات الفروق difference equations التالية:

$$\begin{array}{lcl} p_0(t+h) & = & (1-\lambda_0 h)p_0(t) \\ p_1(t+h) & = & \lambda_0 h\, p_0(t) + (1-\lambda_1 h)p_1(t) \\ p_2(t+h) & = & \lambda_1 h\, p_1(t) + (1-\lambda_2 h)p_2(t) \\ \cdots & & \cdots \\ p_n(t+h) & = & \lambda_{n-1} h\, p_{n-1}(t) + (1-\lambda_n h)p_n(t) \\ \cdots & & \cdots \end{array}$$

نلاحظ أنه يمكن استنتاج هذه المعادلات مباشرة باستخدام مسلمات الاحتمال، ففي الحقيقة للوصول إلى الحالة n عند اللحظة $t+h$ فإنه يمكن سلوك أحد الطريقين التاليين:

١- يمكن للنظام أن يكون في الحالة $n-1$ عند اللحظة t مع حدوث حالة ولادة واحدة خلال الفترة الزمنية $(t, t+h)$، ويحدث ذلك باحتمال $\lambda_{n-1} h$.

٢- يمكن للنظام أن يكون في الحالة n عند اللحظة t مع عدم حدوث أي حالة ولادة خلال

الفترة الزمنية $(t,t+h)$، ويحدث ذلك باحتمال $1-\lambda_{n-1}h$.

وهذا يقود إلى استنتاج المعادلة الأخيرة في معادلات الفروق. وللحصول على المعادلة الأولى يمكن ملاحظة أن الطريقة الوحيدة لأن يظل النظام في الحالة 0 خلال الفترة الزمنية $(t,t+h)$ هي ألاّ يحدث أي ولادة خلال هذه الفترة، ويحدث ذلك باحتمال $1-\lambda_0 h$.

ويمكن تعديل معادلات الفروق للحصول على ما يلي:

$$\frac{p_0(t+h)-p_0(t)}{h}=-\lambda_0\,p_0(t)$$

$$\frac{p_n(t+h)-p_n(t)}{h}=\lambda_{n-1}\,p_{n-1}(t)-\lambda_n\,p_n(t),\ n=1,2,\cdots$$

وبأخذ النهاية عندما تؤول h إلى الصفر يمكن الحصول على:

$$\begin{aligned}\frac{dp_0(t)}{dt} &= -\lambda_0\,p_0(t)\\ \frac{dp_n(t)}{dt} &= \lambda_{n-1}\,p_{n-1}(t)-\lambda_n\,p_n(t),\ n=1,2,\cdots\end{aligned}\qquad (٦,١)$$

هذه المعادلات تكون عبارة عن معادلات فروق - تفاضلية، فهي معادلات تفاضلية في t ومعادلات فروق في n. يتمتع حل الحالات المستقرة steady-state solution (عندما $n\to\infty$) بتطبيقات عديدة في نظرية الطوابير. وعمومًا من المستحيل إيجاد حلٍ معتمد على الزمن لهذه المعادلات إلا في حالات خاصة قليلة جدًا. وفيما يلي سنقدم حالتين خاصتين من عمليات الولادة والتي يمكن الحصول عليهما بفرض قيم خاصة للمعالم ، وهاتين العمليتين هما عمليتي يول Yule وبواسون Poisson.

(٦,٢,١) عملية يول

لنفرض وجود مجتمع من الإلكترونات، وأنه يتم انقسام كل إلكترون في هذا المجتمع إلى عنصرين (مسببًا مولد عنصر جديد) خلال أي فترة زمنية طولها h باحتمال λh، حيث إن $\lambda>0$. عند أي لحظة t فإنه يمكن حدوث ولادة واحد فقط ولكن إذا كان عدد

الإلكترونات n ، فإن كلاً من هذه الإلكترونات يمكن أن ينقسم إلى عنصرين ومن ثم فإن $\lambda_n = n\lambda$ ، $n \geq 0$. تسمى هذه العملية بعملية الولادة الخالصة الخطية linear pure birth process أو بعملية يول. يجب في هذا النموذج أن يكون عدد عناصر المجتمع أكبر من الصفر، وإلا فإن المجتمع لا يمكن أن يتزايد وستبقى العملية في الحالة 0 إلى الأبد. لنفرض، على سبيل المثال، أن المجتمع الأصلي يتكون من إلكترون واحد، أي أن $X(0) = 1$ ، ومن ثَم فإن الاحتمال الابتدائي يعطى بالعلاقة التالية:

$$p_n(0) = \begin{cases} 1, & n = 1, \\ 0, & n = 2,3,\cdots. \end{cases} \qquad (٦,٢)$$

بأخذ $\lambda_n = n\lambda$ في معادلات الفروق - التفاضلية (٦,١) نحصل على:

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = 0 \qquad (\lambda_0 = 0), \qquad (٦,٣)$$

$$\frac{dp_n(t)}{dt} + n\lambda\, p_n(t) = (n-1)\lambda\, p_{n-1}(t),\ n = 1,2,\cdots \qquad (٦,٤)$$

باستخدام العلاقة (٦,٣) مع الشرط الابتدائي (٦,٢) يمكن الحصول على ما يلي:

$$p_0(t) = 0$$

بينما يمكن إعادة كتابة المعادلة (٦,٤) على الصورة التالية:

$$e^{n\lambda t}\left\{\frac{dp_n(t)}{dt} + n\lambda\, p_n(t)\right\} = e^{n\lambda t}(n-1)\lambda\, p_{n-1}(t),\ n = 1,2,\cdots$$

$$\frac{d}{dt}\left(p_n(t)\,e^{n\lambda t}\right) = (n-1)\lambda\, p_{n-1}(t)\,e^{n\lambda t},\ n = 1,2,\cdots \qquad (٦,٥)$$

ويمكن حل المعادلة (٦,٥) كالآتي:

$$\int_0^t d\left(p_n(t)\,e^{n\lambda t}\right) = \int_0^t (n-1)\lambda\, p_{n-1}(t)\,e^{n\lambda t}dt$$

$$p_n(t)\,e^{n\lambda t} - p_n(0) = (n-1)\lambda \int_0^t p_{n-1}(t)\,e^{n\lambda t}dt$$

ولكن $p_n(0)$ لجميع قيم $n = 1,2,\cdots$ ، إذن:

$$p_n(t) = e^{-n\lambda t}\left\{p_n(0) + (n-1)\lambda \int_0^t p_{n-1}(t)\,e^{n\lambda t}dt\right\},\ n = 1,2,\cdots$$

وهذه علاقة تتابعية لحساب $p_n(t)$ والتي يمكن استخدامها للحصول على ما يلي:
عندما $n = 1$:

$$p_1(t) = e^{-\lambda t}\{p_1(0)\}$$

ولكن $p_1(0) = 1$، إذن:

$$p_1(t) = e^{-\lambda t}$$

عندما $n = 2$:

$$p_2(t) = e^{-2\lambda t}\left\{p_2(0) + \int_0^t \lambda\, p_1(t) e^{2\lambda t} dt\right\}$$

وباستخدام $p_2(0) = 0$، $p_1(t) = e^{-\lambda t}$، نحصل على:

$$p_2(t) = e^{-2\lambda t} \int_0^t \lambda\, e^{\lambda t}\, dt$$

$$p_2(t) = e^{-2\lambda t}\left\{e^{\lambda t}\Big|_{t=0}^{t}\right\} = e^{-2\lambda t}\left\{e^{\lambda t} - 1\right\}$$

والتي يمكن كتابتها على الصورة التالية:

$$p_2(t) = e^{-\lambda t}\left(1 - e^{-\lambda t}\right)$$

وبالمثل يمكن الحصول بالاستنتاج (يترك للقارئ) على:

$$p_n(t) = e^{-\lambda t}\left(1 - e^{-\lambda t}\right)^{n-1},\ n \ge 1$$

وهذه العلاقة تعني أن حجم المجتمع n عند اللحظة t يتبع التوزيع الهندسي geometric distribution باحتمال النجاح $p = e^{-\lambda t}$، والذي يسمى أيضًا بتوزيع باسكال Pascal distribution. ومن ثَم فإنه يتوقع أن يكون حجم المجتمع عند اللحظة t عبارة عن $E[X_t] = \frac{1}{p} = e^{\lambda t}$.

مثال (٦,١)

لنفرض أن عملية ولادة خطية خالصة تبدأ بعنصر واحد ولها معدل ولادة $\lambda = 2$ في الساعة. احسب احتمال أن المجتمع سيحتوي على أكثر من 3 أشخاص بعد ساعة، وحجم المجتمع المتوقع في ذلك الوقت.

الحل

حيث إن $\lambda = 2$ ، $t = 1$ ، إذن من المعادلات السابقة يكون لدينا:

$$p_0(1) = 0 \qquad p_2(1) = e^{-2}\left(1-e^{-2}\right) = 0.117,$$

$$p_1(1) = e^{-2} = 0.135, \qquad p_3(1) = e^{-2}\left(1-e^{-2}\right)^2 = 0.101.$$

ومن ثم فإن احتمال احتواء المجتمع على أكثر من ثلاثة أفراد بعد ساعة هو:

$$1-(0+0.135+0.117+0.101) = 0.647$$

والحجم المتوقع في ذلك الوقت:

$$E[X(1)] = e^2 = 7.389.$$

(٦,٢,٢) عملية بواسون

يفترض في العديد من نماذج الطوابير (الصفوف) أن عملية الوصول إلى الخدمة تحدث بناء على عملية بواسون. سنقوم في الفصل التالي باستنتاج توزيع بواسون وسندرس عملية بواسون بالتفصيل. والآن لنأخذ $\lambda_n = \lambda, n \geq 0$ ولنفرض أن الشرط الابتدائي هو $X(0) = 0$ ، ومن ثَم فإن:

$$p_n(0) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n = 1,2,\cdots. \end{cases} \tag{٦,٦}$$

معادلات الفروق-التفاضلية (٦,١) تأخذ في هذه الحالة الصورة التالية:

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda\, p_0(t) \tag{٦,٧}$$

$$\frac{dp_n(t)}{dt} + \lambda\, p_n(t) = \lambda\, p_{n-1}(t),\ n = 1,2,\cdots \tag{٦,٨}$$

وبنفس الطريقة المتبعة في النموذج السابق يمكن حل هذه المعادلات بالتتابع، من المعادلة (٦,٧) نحصل على:

$$\frac{dp_0(t)}{p_0(t)} = -\lambda\, dt$$

وبإجراء التكامل لطرفي هذه العلاقة نحصل على:

$$\ln\left(p_0(t)\right)\Big|_{t=0}^{t} = \ln\left(p_0(t)\right) - \ln\left(p_0(0)\right) = -\lambda t$$

وحيث إن $p_0(0) = 1$ إذن:

$$\ln\left(p_0(t)\right) = -\lambda t$$

ومن ثَم فإن:

$$p_0(t) = e^{-\lambda t}$$

وباستخدام (٦,٨) يمكن الحصول على:

$$e^{\lambda t}\left\{\frac{dp_n(t)}{dt} + \lambda\, p_n(t)\right\} = e^{\lambda t}\{\lambda\, p_{n-1}(t)\},\ n = 1,2,\cdots$$

$$\int_{t=0}^{t} d\left\{e^{\lambda t}\, p_n(t)\right\} = \int_0^t \lambda\, e^{\lambda t}\, p_{n-1}(t),\ n = 1,2,\cdots$$

$$e^{\lambda t}\, p_n(t) - p_n(0) = \int_0^t \lambda\, e^{\lambda t}\, p_{n-1}(t),\ n = 1,2,\cdots$$

وحيث إن $p_n(0) = 0, n = 1,2,\cdots$ إذن:

$$p_n(t) = e^{-\lambda t}\int_0^t \lambda\, e^{\lambda t}\, p_{n-1}(t)\, dt,\ n = 1,2,\cdots$$

وهذه علاقة تتابعية لحساب $p_n(t)$ والتي يمكن استخدامها للحصول على ما يلي:

عندما $n = 1$:

$$p_1(t) = e^{-\lambda t}\int_0^t \lambda\, e^{\lambda t}\, e^{-\lambda t} dt = e^{-\lambda t}\int_0^t \lambda\, dt$$

أي أن:

$$p_1(t) = \lambda\, t e^{-\lambda t}$$

عندما $n = 2$:

$$p_1(t) = e^{-\lambda t}\int_0^t \lambda\, e^{\lambda t}\, \lambda t\, e^{-\lambda t} dt = \lambda^2\, e^{-\lambda t}\int_0^t t\, dt$$

أي أن:

$$p_2(t) = \frac{(\lambda t)^2}{2} e^{-\lambda t}$$

وبالمثل يمكن الحصول على الحل العام:

$$p_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, \ \ n \ge 0$$

وهذه العلاقة تعني أن حجم المجتمع n عند اللحظة t يتبع توزيع بواسون بالمعلمة λt. ومن ثَم فإنه يتوقع أن يكون حجم المجتمع عند اللحظة t عبارة عن $E[X_t] = \lambda t$.

مثال (٦,٢)

لتكن $\{X(t); t \ge 0\}$، $X(0) = 0$ عملية بواسون بمعدل ولادة $\lambda = 2$ في الساعة. احسب احتمال أن المجتمع سيحتوي على أكثر من 3 أشخاص بعد ساعة، وحجم المجتمع المتوقع في ذلك الوقت.

الحل

بما أن $\lambda = 2$، $t = 1$، إذن من معادلات عملية بواسون السابقة يكون لدينا:

$$p_0(1) = e^{-2} = 0.135, \qquad p_2(1) = \tfrac{2^2}{2!} e^{-2} = 0.271,$$

$$p_1(1) = \tfrac{2}{1!} e^{-2} = 0.271, \qquad p_3(1) = \tfrac{2^3}{3!} e^{-2} = 0.18,$$

ومن ثم فإن احتمال احتواء المجتمع على أكثر من ثلاثة أفراد بعد ساعة هو:

$$1 - (0.135 + 0.271 + 0.271 + 0.18) = 0.143$$

وأن الحجم المتوقع في ذلك الوقت:

$$E[X(1)] = 2(1) = 2.$$

وقبل أن نختم هذا الجزء نود أن نذكر بأنه يمكن استخدام عملية بواسون لدراسة النماذج التالية:

١- عدد الأشخاص الذين يحملون عدوى معينة في مجتمع ما.

٢- انتشار الأوبئة في مجتمع ما.

ونظراً لأهمية عملية بواسون فسنقوم بتخصيص فصلٍ كاملٍ لدراستها دراسة مستفيضة.

(٦,٣) عملية الوفاة الخالصة
Pure death process

يتوقع البعض أن عملية الوفاة الخالصة يمكن أن تكون عملية مرافقة (ثنائيـــة) dual والآن لنفرض أنه إذا كان النظام عند اللحظة الزمنية $t > 0$ في الحالة n، فإنه لأي قيمة صغيرة $h > 0$ فإنه يمكن أن ينتقل النظام إلى الحالة $n-1$ أو يبقى في الحالة n عند اللحظة $t+h$. يسمى الانتقال من الحالة n إلى الحالة $n-1$ بالوفاة death. ومن ثَم انطلاقًا من الحالة N، فإن العملية ستنتقل بالتتابع خلال الحالات $N-1$، $N-2$، ...، 2، 1 وتمتص أخيرًا في الحالة 0.

كما فعلنا في عملية الولادة الخالصة نفرض أن $X(t)$ يرمز إلى عـــدد الأشـــخاص في مجتمع ما في مكان معين عند اللحظة t. ولنفرض أن حجم المجتمع يتناقص نتيجة الوفيات بناء على القواعد التالية:

١- الوفيات التي تحدث في فترات زمنية مختلفة تكون مستقلة عن بعضها البعض.

٢- عندما يكون في المجتمع عدد n من الأشخاص عند اللحظة الزمنية t، فإن:

(أ) احتمال وفاة شخص واحد في الفترة $(t, t+h) = \mu_n h + o(h)$.

(ب) احتمال أكثر من وفاة واحدة في الفترة $(t, t+h) = o(h)$.

ومن ثم فإنه يمكن استنتاج مصفوفة احتمالات الانتقال في هذه الحالة في الشكل التالي:

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ N-1 \\ N \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & \cdots & N-1 & N \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \mu_1 h & 1-\mu_1 h & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 h & 1-\mu_2 h & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-\mu_{N-1} h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mu_N h & 1-\mu_N h \end{pmatrix} \end{array}$$

باستخدام مصفوفة احتمالات الانتقال ومتجه احتمالات الحالات عند اللحظـــة t ومتجـــه احتمالات الانتقال عند اللحظة $t+h$ والعلاقة:

$$(p_0(t+h), p_1(t+h), \cdots, p_N(t+h)) = (p_0(t), p_1(t), \cdots, p_N(t))P$$

يمكن الحصول على معادلات الفروق difference equations لعملية الوفاة الخالصة في الصورة التالية:

$$\begin{aligned}
p_0(t+h) &= p_0(t) + \mu_1 h\, p_1(t), \\
p_1(t+h) &= (1-\mu_1 h) p_1(t) + \mu_2 h\, p_2(t), \\
p_2(t+h) &= (1-\mu_2 h) p_2(t) + \mu_3 h\, p_3(t), \\
&\vdots \\
p_{N-1}(t+h) &= (1-\mu_{N-1} h) p_{N-1}(t) + \mu_N h\, p_N(t), \\
p_N(t+h) &= (1-\mu_N h) p_N(t).
\end{aligned}$$

ومن ثَم فإن معادلات الفروق - التفاضلية المقابلة لنظام المعادلات التفاضلية (٦,١) تأخذ الصورة التالية:

$$\begin{aligned}
\frac{dp_0(t)}{dt} &= \mu_1 p_1(t), \\
\frac{dp_n(t)}{dt} &= \mu_{n+1} p_{n+1}(t) - \mu_n p_n(t),\ n = 1,2,\cdots,N-1, \\
\frac{dp_N(t)}{dt} &= -\mu_N p_N(t).
\end{aligned}$$

وباستخدام المعادلة الأخيرة يمكن الحصول على $p_N(t)$ كالآتي:

$$\frac{dp_N(t)}{p_N(t)} = -\mu_N dt$$

$$\int_0^t \frac{dp_N(t)}{p_N(t)} = -\int_0^t \mu_N dt$$

$$\ln p_N(t) - \ln p_N(0) = -\mu_N t$$

وحيث إن $X(0) = N$ ، أي أن $p_N(0) = 1$ ، إذن:

$$p_N(t) = e^{-\mu_N t}$$

ومن المعادلات الوسطى يمكن الحصول على $p_n(t)$ ، $n = 1,2,\cdots,N-1$ ، كالآتي:

$$\frac{dp_n(t)}{dt} + \mu_n p_n(t) = \mu_{n+1} p_{n+1}(t),$$

$$e^{\mu_n t}\left\{\frac{dp_n(t)}{dt} + \mu_n p_n(t)\right\} = e^{\mu_n t}\{\mu_{n+1} p_{n+1}(t)\},$$

$$p_n(t)e^{\mu_n t} - p_n(0) = \int_0^t \mu_{n+1} e^{\mu_n t} p_{n+1}(t)\, dt,$$

وحيث إن $p_n(0) = 0, n = 1,2,\cdots, N-1$ إذن:

$$p_n(t) = e^{-\mu_n t} \int_0^t \mu_{n+1} e^{\mu_n t} p_{n+1}(t)\, dt, n = 1,2,\cdots, N-1.$$

وهذه علاقة تتابعية يمكن استخدامها في الحصول على $p_n(t)$ بمساعدة $p_{n+1}(t)$، $n = 1,2,\cdots, N-1$.

وأخيرًا من المعادلة الأولى نحصل على:

$$p_0(t) - p_0(0) = \int_0^t \mu_1 p_1(t)\, dt,$$

وحيث إن $p_0(0) = 0$ إذن:

$$p_0(t) = \int_0^t \mu_1 p_1(t)\, dt,$$

إذا كانت $\mu_n = n\mu$ ، والذي يعني أن كل شخص على قيد الحياة عند اللحظة t يمكن أن يتوفى خلال الفترة $(t, t+h)$ باحتمال $\mu h + o(h)$. وهذا يعطي عملية وفاة بحتة خطيةlinear pure death process. من السهل، باستخدام العلاقات السابقة، توضيح أن حل معادلات الفروق - التفاضلية عندما يكون حجم المجتمع الابتدائي هو N يكون:

$$p_N(t) = e^{-N\mu t},$$

$$p_{N-1}(t) = e^{-(N-1)\mu t} \int_0^t N\mu e^{(N-1)\mu t} p_N(t)\, dt,$$

$$p_{N-1}(t) = e^{-(N-1)\mu t} \int_0^t N\mu\, e^{-\mu t} dt,$$

أي أن:

$$p_{N-1}(t) = N e^{-(N-1)\mu t}\left(1 - e^{-\mu t}\right),$$

بالمثل يمكن الحصول على:

$$p_{N-2}(t) = e^{-(N-2)\mu t} \int_0^t (N-1)\mu e^{(N-2)\mu t} p_{N-1}(t)\,dt,$$

$$p_{N-2}(t) = N(N-1)e^{-(N-2)\mu t} \int_0^t \mu e^{-\mu t}\left(1-e^{-\mu t}\right)dt,$$

$$p_{N-2}(t) = \tfrac{1}{2} N(N-1)\, e^{-(N-2)\mu t}\left(1-e^{-\mu t}\right)^2,$$

وبالتتابع يمكن الحصول على $p_n(t)$ في الصورة التالية:

$$p_n(t) = \begin{cases} \binom{N}{n} e^{-n\mu t}\left(1-e^{-\mu t}\right)^{N-n}, & n \le N, \\ 0, & n > N. \end{cases}$$

ومن ثَم فإنه يتوقع أن يكون حجم المجتمع عند اللحظة t عبارة عن $E[X_t] = Ne^{-\mu t}$.

مثال (٦,٣)

لنفرض أن عملية وفاة خطية خالصة تبدأ بعشرة أفراد، ولها معدل وفاة $\mu = 0.6$ في الأسبوع. احسب احتمال أن المجتمع سيحتوي على الأقل على 8 أشخاص بعد ثلاثة أيـــام، وحجم المجتمع المتوقع في ذلك الوقت.

الحل

حيث إن $\mu = 0.6$ ، $t = 3/7$ ، $N = 10$ ، إذن من المعادلات الـــسابقة يكـــون لدينا:

$$p_8(3/7) = \binom{10}{8} e^{-8(0.6)(3/7)}\left(1-e^{-0.6(3/7)}\right)^{10-8} = 0.296,$$

$$p_9(3/7) = \binom{10}{9} e^{-9(0.6)(3/7)}\left(1-e^{-0.6(3/7)}\right)^{10-9} = 0.224,$$

$$p_{10}(3/7) = \binom{10}{10} e^{-10(0.6)(3/7)}\left(1-e^{-0.6(3/7)}\right)^{10-10} = 0.076$$

ومن ثم فإن احتمال أن المجتمع يحتوي على الأقل على 8 أشخاص بعد ثلاثة أيام هو:

$$0.296 + 0.224 + 0.076 = 0.596$$

والحجم المتوقع في ذلك الوقت:

$$E[X(3/7)] = 10e^{-0.6(3/7)} = 7.73.$$

(٦,٤) عملية الولادة والوفاة
Birth-and-death process

تعتبر عملية الولادة والوفاة كعملية ناتجة من اندماج عمليتي الولادة الخالصة والوفاة الخالصة، ومن ثم فهي تعمم هاتين العمليتين. لنفرض أن $X(t)$ يرمز إلى عدد الأشخاص في مجتمع ما في مكان معين عند اللحظة t. ولنفرض أن حجم المجتمع يزداد نتيجة الولادة ويتناقص نتيجة الوفاة بناء على القواعد التالية:

١- يمكن حدوث حادثة واحدة (إما وفاة وإما ولادة) على الأكثر عند أي لحظة، بمعنى أنه من المستحيل حدوث ولادة ووفاة في نفس اللحظة.

٢- عندما يكون في المجتمع عدد n من الأشخاص عند اللحظة الزمنية t، فإن:

(أ) احتمال ولادة شخص واحدة في الفترة $(t,t+h) = \lambda_n h + o(h)$.

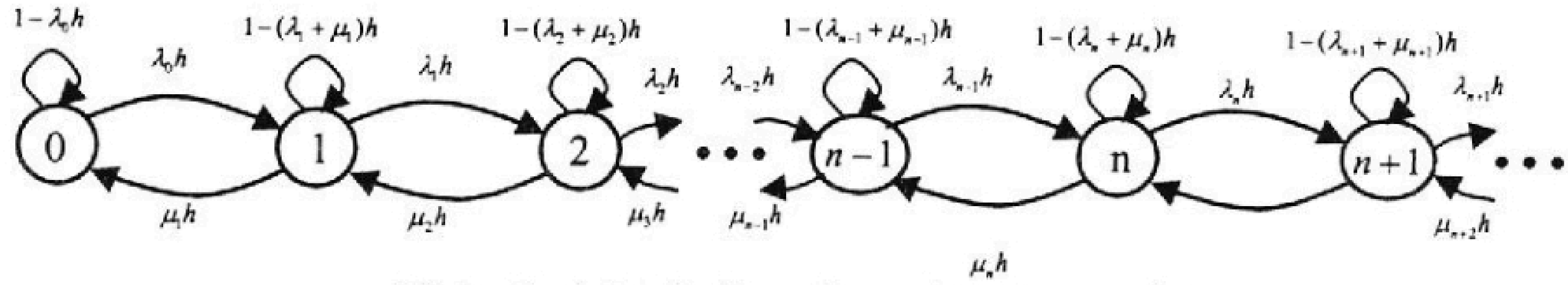
(ب) احتمال وفاة شخص واحد في الفترة $(t,t+h) = \mu_n h + o(h)$.

(ج) احتمال أكثر من تغير (وفاة أو ولادة) واحد في الفترة $(t,t+h) = o(h)$.

لنفرض أن $p_{ij}(t)$ يشير إلى احتمال أن عدد الأشخاص في المجتمع عند اللحظة t يتغير من i إلى j عند اللحظة $t+h$، ومن ثَم وبحذف الحدود $o(h)$، فإن مصفوفة احتمالات الانتقال تعطى على الصورة التالية:

$$P = \begin{array}{c|cccccccc}
 & 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 & n & n+1 & \cdots \\
\hline
0 & 1-\lambda_0 h & \lambda_0 h & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
1 & \mu_1 h & 1-(\lambda_1+\mu_1)h & \lambda_1 h & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
2 & & \mu_2 h & 1-(\lambda_2+\mu_2)h & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
n-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-(\lambda_{n-1}+\mu_{n-1})h & \lambda_{n-1}h & 0 & \cdots \\
n & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_n h & 1-(\lambda_n+\mu_n)h & \lambda_n h & \cdots \\
n+1 & 0 & 0 & 0 & & 0 & \mu_{n+1}h & 1-(\lambda_{n+1}+\mu_{n+1})h & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

لاحظ من (أ)، (ب)، (ج) أن احتمال عدم وجود ولادة أو وفاة خلال الفترة $(t,t+h)$، عندما يكون حجم المجتمع n، هو $1-(\lambda_n+\mu_n)h+o(h)$. يعطي الشكل (٦,٢) الرسم البياني لهذه العملية.



شكل (٦,٢): الرسم البياني لعملية الولادة والوفاة.

باتباع نفس الرموز ونفس الطريقة المتبعة في عمليتي الولادة الخالصة والوفاة الخالصة يمكن التحقق من العلاقة التالية:

$$\left(p_0(t+h), p_1(t+h), \cdots, p_n(t+h), \cdots\right) = \left(p_0(t), p_1(t), \cdots, p_n(t), \cdots\right)P$$

تكافئ:

$$\begin{aligned} p_0(t+h) &= (1-\lambda_0 h)\, p_0(t) + \mu_1 h p_1(t) \\ p_n(t+h) &= \lambda_{n-1} h p_{n-1}(t) + \left[1-(\lambda_n+\mu_n)\,h\right] p_n(t) + \mu_{n+1} h p_{n+1}(t), n \geq 1 \end{aligned}$$

باستخدام هذه العلاقات يمكن الحصول على ما يلي:

$$\begin{aligned} \frac{dp_0(t)}{dt} &= -\lambda_0\, p_0(t) + \mu_1 p_1(t) \\ \frac{dp_n(t)}{dt} &= \lambda_{n-1} p_{n-1}(t) - (\lambda_n+\mu_n)\, p_n(t) + \mu_{n+1} p_{n+1}(t),\ n = 1,2,\cdots \end{aligned}$$

(٦,٩)

هذه المعادلات تكون عبارة عن معادلات الفروق - التفاضلية لعملية الولادة والوفاة. وكما في عملية الولادة الخالصة فإن حل الحالات المستقرة ($n \to \infty$) لعملية الولادة والوفاة تتمتع بالعديد من التطبيقات في نظرية الطوابير، وليس من الممكن الحصول على الحل المعتمد على الزمن إلا في حالات خاصة قليلة جدًا.

لأي $n \geq 0$ وبأخذ $\lambda_n = n\lambda$ ، $\mu_n = n\mu$ ، حيث إن λ ، μ عبارة عن ثابتين موجبين نحصل على عملية الولادة والوفاة الخطية linear birth-and-death process. يمكن برهنة أن حل معادلات الفروق-التفاضلية لعملية الولادة والوفاة في هذه الحالة بشرط أن تبدأ العملية عندما يكون حجم المجتمع مساويًا لعنصرٍ واحدٍ، بمعنى أن $p_1(0) = 1$ ، هو:

$$p_n(t) = \begin{cases} r(t), & n = 0, \\ [1 - r(t)][1 - s(t)][s(t)]^{n-1}, & n = 1,2,\cdots. \end{cases}$$

حيث إن:

$$s(t) = \frac{\lambda\left[e^{(\lambda-\mu)t} - 1\right]}{\lambda e^{(\lambda-\mu)t} - \mu} \text{ ، } r(t) = \frac{\mu\left[e^{(\lambda-\mu)t} - 1\right]}{\lambda e^{(\lambda-\mu)t} - \mu}$$

ومن ثم فإن حجم المجتمع المتوقع عند اللحظة t هو $E[X_t] = e^{(\lambda-\mu)t}$.

مثال (٦,٤)

يلاحظ أحد المختصين بعلوم الأحياء تكاثر البكتريا في مكان ما ووجد أن كلاً من احتمالي ولادة بكتريا واحدة ووفاة بكتريا واحدة يتناسب مع عدد البكتريا الموجودة في المكان والزمن المنقضي (أي أن عدد البكتريا في المكان تتبع عملية ولادة ووفاة خطية). وفي المتوسط تُولد بكتريا واحدة جديدة كل سبع ساعات، وتتوفى واحدة كل ثلاثين ساعة. ما هو العدد المتوقع للبكتريا في ذلك المكان بعد أسبوع، إذا افترضنا أن المكان كان يحتوي في البداية على بكتريا واحدة.

الحل

إذا فرضنا أن وحدة الزمن هي اليوم، ولدينا $X(0) = 1$ ، إذن

حيث إن $\lambda = \frac{1}{7}(24) = 3.43$ ، $\mu = \frac{1}{30}(24) = 0.8$ ،

إذن العدد المتوقع للبكتريا في ذلك المكان بعد أسبوع هو:

$$E[X(7)] = e^{(3.43-0.8)7} = 97953164.$$

وفي النهاية نذكر بأن عمليات الولادة والوفاة تستخدم لدراسة عدد الأشخاص الذين يحملون فيروساً معيناً في مكان ما، وعدد الزبائن اللذين يمكن أن يتم خدمتهم في محل ما، ... إلخ. يمكن أيضًا استخدام هذه العمليات لوصف العمليات الوراثية والمنطقية.

(٦,٥) تمارين

(٦,١) استخدم الحل التالي لحساب متوسط وتباين عملية يول التي تحقق أن $X(0) = 1$

$$p_n(t) = e^{-\lambda t}\left(1 - e^{-\lambda t}\right)^{n-1}, \; n \geq 0$$

(٦,٢) باستخدام المعادلات (٦,١) لعملية الولادة الخالصة وبفرض أن المجتمع في البداية لم يحتوي على أي عنصر، بمعنى:

$$p_k(0) = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ 0, & k > 0, \end{cases}$$

١- أثبت أن $p_0(t) = e^{-\lambda_0 t}$.

٢- وضح أن الحل العام هو:

$$p_k(t) = e^{-\lambda_k t}\left[\lambda_{k-1} \int_0^t p_{k-1}(x) e^{\lambda_k x}\, dx + p_k(0)\right], \; k = 0,1,2,\cdots$$

٣- أثبت أن:

$$p_1(t) = \frac{\lambda_0\left(e^{-\lambda_0 t} - e^{-\lambda_1 t}\right)}{\lambda_1 - \lambda_0}$$

$$p_2(t) = \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_0}\left[\frac{e^{-\lambda_2 t} - e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} - \frac{e^{-\lambda_2 t} - e^{-\lambda_0 t}}{\lambda_2 - \lambda_0}\right].$$

(٦,٣) بفرض عملية وفاة بحتة لمجتمع بحجم ابتدائي مقداره N ($X(0) = N$) وبمعدل وفاة ثابت $\mu_k = \mu \geq 0$ لأجل $k = 1,2,\cdots,N$.

١- أثبت أن معادلات الفروق-التفاضلية لهذه العملية تأخذ الصورة التالية:

$$\frac{dp_k(t)}{dt} = -\mu\, p_k(t) + \mu\, p_{k+1}(t), \; k = 1,2,\cdots,N-1,$$

$$\frac{dp_N(t)}{dt} = -\mu\, p_N(t),$$

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\mu\, p_1(t).$$

٢- وضح بالاستنتاج الرياضي أنه يمكن الحصول على حل معادلات الفروق التفاضلية على الصورة التالية:

$$\begin{aligned} p_k(t) &= \frac{(\mu t)^{N-k}}{(N-k)!}e^{-\mu t},\ k=1,2,\cdots,N, \\ p_0(t) &= \sum_{k=N}^{\infty}\frac{(\mu t)^k}{k!}e^{-\mu t}. \end{aligned}$$

(٦,٤) استخدم مسلمات الاحتمال لاستنتاج المعادلات (٦,٩).

(٦,٥) بفرض المعادلات (٦,٩) لعملية الولادة والوفاة وبفرض أن حل الحالات المستقرة موجود، بمعنى $\lim_{t\to\infty} p_n(t) = p_n$ ، $\frac{dp_n(t)}{dt} = 0$.

١- أعد كتابة المعادلات (٩,٦) في هذه الحالة. لاحظ أنه لا يمكن استنتاج هذه المعادلات بكتابة المعدل الذي تدخل فيه العملية أي حالة يساوي المعدل الذي تخرج به منها. تسمى هذه المعادلات بمعادلات الموازنة balance equations أو علاقات محافظة التدفق conservation flow relationships.

٢- وضح أن:

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\lambda_0}{\mu_1}p_0 \\ p_2 &= \frac{\lambda_0\,\lambda_1}{\mu_1\mu_2}p_0 \\ &\vdots \\ p_n &= \frac{\lambda_0\,\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}p_0 \end{aligned}$$

٣- استخدم العلاقة $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$ لبرهان أن:

$$p_0 = \left[1+\frac{\lambda_0}{\mu_1}+\frac{\lambda_0\,\lambda_1}{\mu_1\mu_2}+\cdots+\frac{\lambda_0\,\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}\right]^{-1},$$

بشرط أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}$ تكون متقاربة.

٤- احسب احتمالات الحالات المستقرة إذا كان:

(أ) $\lambda_n = \lambda,\ \mu_n = \mu$ ،

(ب) $\lambda_n = \lambda,\ \mu_n = n\mu$ ،

(ج) $\lambda_n = \lambda < 1,\ \mu_n = \dfrac{n}{n+1}$

(د) $\lambda_n = \dfrac{\lambda}{n+1} < 1,\ \mu_n = \dfrac{\mu}{n+1}$ بشرط أن $\lambda < \mu$.

(٦,٦) يعمل عامل مع آلة تتعطل من وقت إلى آخر، وعندما تتعطل هذه الآلة فإنه يقوم بإصلاحها ثم تعاود الآلة عملها حتى تتعطل مرة أخرى. بفرض أن:

$p_R(t)$: احتمال أن الآلة تعمل عند اللحظة t.

$p_S(t)$: احتمال أن الآلة لاتعمل عند اللحظة t.

توجد حالتان فقط لهذه الآلة، وبفرض أن التقريب الأول لاحتمالات الانتقال في $o(h)$ خلال الفترة $(t, t+h)$ هو (تم حذف الحدود التي تحتوي على $o(h)$):

$$\begin{array}{lcl} R \rightarrow R & : & 1-\alpha h \\ R \rightarrow S & : & \alpha h \\ S \rightarrow R & : & \beta h \\ S \rightarrow S & : & 1-\beta h \end{array}$$

١- وضح أن:

$$\begin{aligned} p_R(t+h) &= (1-\alpha h)p_R(t) + \beta h\, p_S(t) + o(h) \\ p_S(t+h) &= \alpha h p_R(t) + (1-\beta h)\, p_S(t) + o(h) \end{aligned}$$

٢- استخدم هذه المعادلات في الحصول على مجموعة معادلات الفروق - التفاضلية.

٣- استخدم العلاقة $p_R(t) + p_S(t) = 1$ لتوضيح أن حل معادلات الفروق - التفاضلية هو:

$$\begin{aligned} p_R(t) &= \frac{\beta}{\alpha+\beta}\left[1-e^{-(\alpha+\beta)t}\right] + p_R(0)\, e^{-(\alpha+\beta)t} \\ p_S(t) &= \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\left[1-e^{-(\alpha+\beta)t}\right] + p_S(0)\, e^{-(\alpha+\beta)t} \end{aligned}$$

حيث إن $p_R(0)$ ، $p_S(0)$ عبارة عن الاحتمالات الابتدائية.

٤- استنتج حل الحالة المستقر steady state solution.

الفصل السابع

عملية بواسون
Poisson Process

(٧,١) مقدمة

بجانب البساطة الرياضية التي تتمتع بها عملية بواسون كمثال بسيط على عملية ماركوف، فإنها تتمتع بخاصية الوحدانية والتي تجعلها نظرية مركزية. عملية بواسون تكون عبارة عن عملية متصلة تصف عدد الحوادث العشوائية النقطية التي تحدث في فترة زمنية معينة. غالباً نشير إلى هذه الحوادث بالوصول، فعلى سبيل المثال عدد المسائل أو المهام التي تصل إلى معالج بيانات، أو عدد المكالمات الهاتفية التي تصل إلى تحويلة هاتفية، عدد الجزيئات التي تصل إلى عداد جيجر، عدد الأخطاء المطبعية في صفحة من صفحات كتاب معين، عدد الزبائن الذين يصلون إلى سوق معين، عدد الأشخاص الذين ينتظرون في صف لتلقي خدمة معينة، ... إلخ.

(٧,٢) تعاريف

عملية بواسون تكون عبارة عن عملية عشوائية بفضاء معلمة متصل وفضاء حالة متقطع $S=\{0,1,2,\cdots\}$. يوجد تعريفان لعملية بواسون، سنبرهن في نظرية (٧,١) أنهما متكافئين. ليكن $N_{t,\tau}$ عدد الوصول خلال الفترة $(t,\tau]$. يمكن أحيانًا كتابة N_t بدلاً من $N_{0,t}$ عدد الوصول في الفترة $(0,t]$. بيانياً الراسم $t\to N_t$ يكون غير تناقصي، متزايد بالقفزات فقط، ومتصل من اليمين ويحقق أن $N_0=0$ (انظر الشكل (٧,١)). أحيانًا تسمى

العملية $\{N_t : t \ge 0\}$ بعملية العد counting process.

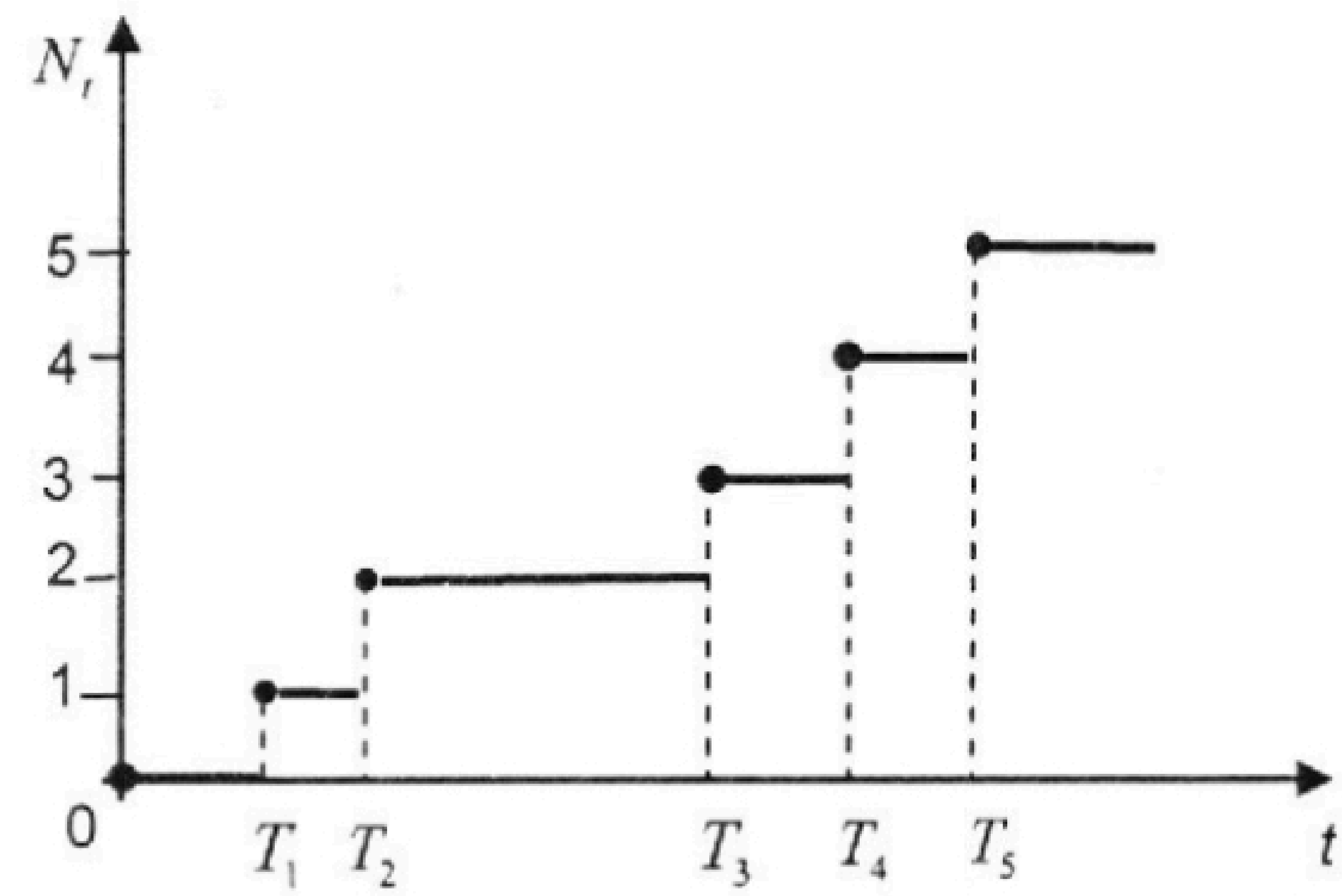
تعريف (٧,١)

تكون العملية $\{N_t ; t \ge 0\}$ عملية بواسون إذا كان لأي $t, \tau \ge 0$ يتحقق ما يلي:

(١) تكون العملية متجانسة مع الزمن time-homogeneous، أي أنه لأي عدد صحيح غير سالب k، الاحتمال $P(N_{\tau,\tau+t} = k)$ مستقلاً عن τ، وهذا يكافئ أن $N_{\tau,\tau+t}$، $N_{0,t}$ لهما نفس التوزيع.

(٢) يكون للعملية زيادات مستقلة، بمعنى أن $N_{\tau,\tau+t}$، $N_{0,t}$ يكونان مستقلين.

(٣) تكون عملية منظمة (مرتبة) orderly، بمعنى أن $\lim_{t\to 0} \dfrac{P(N_{\tau,\tau+t} \ge 2)}{t} = 0$.



شكل (٧,١)**: الدالة** N_t **والتي لأجلها أزمنة الوصول هي** $T_1 = 0.4$، $T_2 = 0.6$، $T_3 = 1.8$، $T_4 = 2.1$، $T_5 = 2.4$، ....

يمكن تعريف عملية بواسون بطريقة مكافئة كما في التعريف التالي.

تعريف (٧,٢)

تكون العملية $\{N_t ; t \ge 0\}$ عملية بواسون إذا وجد عدد صحيح موجب λ بحيث لأي $t, h \ge 0$ يتحقق ما يلي:

(أ) $P(N_{t,t+h} = 0) = 1 - \lambda h + o(h)$،

(ب) $P(N_{t,t+h}=1)=\lambda h+o(h)$ ،

(ج) $P(N_{t,t+h}\geq 2)=o(h)$ ،

(د) $N_{t,t+h}$ ، $N_{0,t}$ يكونان مستقلين لجميع قيم $t,h>0$.

يسمى العدد λ بمعلمة أو بمعدل عملية بواسون.

نظرية (٧,١)

التعريفان (٧,١) ، (٧,٢) متكافئان.

البرهان

أولاً (٢) هو نفس (د) و (٣) هو نفس (ج)، علاوة على ذلك يمكن الحصول على (ب) من (أ) و (ج) وذلك لأن $1=P(N_{t,t+h}\geq 0)$. الآن وحيث إن الأطراف اليمنى للعلاقات (أ)، (ب)، (ج) لا تحتوي على t ، فإن (١) تكون متحققة (سنقوم بالتحقيق من ذلك بالتفصيل لاحقاً). يتبقي أن نبرهن على أنه يمكن استنتاج (أ) من النظرية (٧,١). بأخذ $p_k(t)=P(N_{0,t}=k)=P(N_{\tau,\tau+t}=k)$ لأي $\tau>0$ وذلك باستخدام (١). ومن ثَم يكون لدينا لأي $t,s>0$:

$$\begin{aligned} p_0(t+s) &= P(N_{0,s+t}=0) \\ &= P(N_{0,s}=0, N_{s,s+t}=0) \quad \text{by (2)} \\ &= P(N_{0,s}=0)P(N_{s,s+t}=0) \quad \text{by (1)} \\ &= p_0(s)\,p_0(t) \end{aligned}$$

بالمثل يمكن التحقق باستخدام الاستنتاج الرياضي من أنه لأي $n\geq 1$ فإن:

$$p_0(t_1+t_2+\cdots+t_n)=p_0(t_1)p_0(t_2)\cdots p_0(t_n)$$

وباستخدام $\sum_{i=1}^{n}(1/n)=1$ ، ينتج أن:

$$p_0(1)=\left[p_0(\tfrac{1}{n})\right]^n$$

بكتابة $p_0(1)=e^{-\lambda}$ ، حيث إن $0<\lambda<\infty$ ، فإن:

$$p_0(\tfrac{1}{n})=e^{-\lambda/n}$$

وبنفس الطريقة نحصل على:

$$p_0\left(\tfrac{k}{n}\right)=e^{-k\lambda/n}$$

علاوة على ذلك فإن:

$$p_0(s+t)\le p_0(t)$$

وحيث إن $p_0(s+t)=p_0(t)p_0(s)$ إذن $p_0(t)$ تتناقص مع زيادة t. والآن ولأي $t\ge 0$ يوجد عدد صحيح $k>0$ يحقق أن $(k-1)/n\le t<k/n$. ومن ثَم يكون لدينا

$$e^{-(k-1)\lambda/n}=p_0\left(\tfrac{k-1}{n}\right)\ge p_0(t)>p_0\left(\tfrac{k}{n}\right)=e^{-k\lambda/n}$$

ومن ثم فإنه عندما $t\to\infty$ يكون $p_0(t)\to e^{-\lambda t}=1-\lambda t+o(t)$ والتي تبرهن (أ).

ملاحظة (٧,١)

١- تعتبر عملية بواسون مثال لعملية عشوائية بفضاء معلمة متصل (عملية متصلة الزمن) وبزيادات مستقلة ومستقرة. من التعريف (٧,١) الشرط (١) يعطي خاصية الاستقرار أما الشرط (٢) فيعطي خاصية الزيادات المستقلة.

٢- أحد تفسيرات خاصية الزيادات المستقلة هو أن الحوادث تحدث عشوائيًا. يشار إلى الحوادث التي تحدث تبعًا لعملية بواسون بالحوادث التي تحدث عشوائيًا. ومن ثَم عندما نذكر أن الحوادث تحدث عشوائيًا، بدون ذكر اسم العملية التي تحدث الحوادث تبعًا لها، فهذا يعني أنها تحدث تبعًا لعملية بواسون.

نظرية (٧,٢)

المتغير العشوائي N_t يتبع توزيع بواسون.

البرهان

من أفضل الطرائق التي يمكن اتباعها لبرهان هذه النظرية هي استخدام الدوال المولدة للاحتمال كما سنوضح الآن. أولاً نعتبر N_h لأي متغير h يأخذ قيمًا صغيرة. من ثَم وبناء على (أ)، (ب)، (ج) من تعريف (٧,٢)، يمكن الحصول على ما يلي:

$$\begin{aligned}E\left[z^{N_h}\right]&=(1-\lambda h)z^0+\lambda h\,z^1+o(h)\,z^2\\&=1-\left((1-z)\lambda h\right)+o(h)\,z^2\\&=e^{-\lambda(1-z)h+o(h)}\end{aligned}$$

و لحساب $E\left[z^{N_t}\right]$ يمكن تقسيم الفترة $[0,t]$ إلى n فترة جزئية طول كل واحدة منها h، ومن ثم فإن:

$$\begin{aligned} E\left[z^{N_t}\right] &= E\left[z^{N_{0,h}+N_{h,2h}+\cdots+N_{t-h,h}}\right] \\ &= \left(E\left[z^{N_{0,h}}\right]\right)^n \end{aligned}$$

وحيث إن $n = t/h$، إذن:

$$\begin{aligned} E\left[z^{N_t}\right] &= \left(E\left[z^{N_h}\right]\right)^{t/h} \\ &= \left[e^{-\lambda(1-z)h+o(h)}\right]^{t/h} \\ &= e^{-\lambda(1-z)t+t\,o(h)/h} \\ &\to e^{-\lambda(1-z)t} \text{ as } h \to 0 \end{aligned}$$

ملاحظة (٧,٢)

١- يمكن برهان النظرية السابقة مباشرة باستخدام الاستنتاج الرياضي كما قدمنا في الجزء (١,٢,٢).

٢- أحد نتائج النظرية (٧,٢) هي أن المتغير العشوائي الذي يتبع توزيع بواسون هو المتغير الوحيد الذي يحقق الشروط المقدمة في التعريفين (٧,١)، (٧,٢).

٣- أيضًا النظرية (٧,٢) تعني أن عدد المرات التي تحدث عندها الحوادث في فترة زمنية معينة بطول t يتبع توزيع بواسون بالمعلمة λt.

٤- حتى الآن نلاحظ أن λ هو عبارة عن ثابت لم نقدم له أي معنى محدد. الآن نلاحظ أن لأي $t \geq 0$

$$E[N_t] = \lambda t \tag{٧,١}$$

ومن ثم فإن λ هو عبارة عن عدد الوصول المتوقع في فترة طولها الوحدة، وبمعنى آخر هو عبارة عن معدل الوصول. يمكن أيضًا التحقق من أن:

$$\operatorname{Var}[N_t] = \lambda t \tag{٧,٢}$$

مثال (٧,١)

ليكن $\{N_t ; t \geq 0\}$ عملية بواسون بمعدل $\lambda = 8$ ، ونريد حساب:

$$P(N_{2.5} = 17, N_{3.7} = 22, N_{4.3} = 36)$$

لدينا:

$$\begin{aligned}\{N_{2.5} = 17, N_{3.7} = 22, N_{4.3} = 36\} = \\ \{N_{2.5} = 17, N_{3.7} - N_{2.5} = 5, N_{4.3} - N_{3.7} = 14\}\end{aligned}$$

من خاصية الزيادات المستقلة فإن المتغيرات $N_{2.5}$ ، $N_{3.7} - N_{2.5}$ ، $N_{4.3} - N_{3.7}$ تكون مستقلة، ومن خاصية الاستقرار فإنها تتبع توزيع بواسون بالمعالم التالية $8 \times 2.5 = 20$ ، $8 \times (3.7 - 2.5) = 9.6$ ، $8 \times (4.3 - 3.7) = 4.8$ على الترتيب. ومن ثَم فإن الاحتمال المطلوب هو:

$$\frac{e^{-20}\, 20^{17}}{17!} \cdot \frac{e^{-9.6}\, 9.6^{5}}{5!} \cdot \frac{e^{-4.8}\, 4.8^{14}}{14!}$$

مثال (٧,٢)

لنفرض أن مكالمات هاتفية تصل عشوائيًا إلى تحويلة هاتف بمعدل 15 مكالمة في الساعة.

١- أوجد احتمال أن تصل على الأقل مكالمتان بين الساعة 8 والساعة 8:12 صباحًا.

٢- إذا تغيب العامل لمدة 10 دقائق، أوجد احتمال عدم فقد أي مكالمة.

الحل

١- ليكن X هو عدد المكالمات التي تصل إلى التحويلة بين الساعة 8 والساعة 8:12 صباحًا. إذن X يتبع توزيع بواسون بالمتوسط $3 = \frac{12 \times 15}{60}$ ، ومن ثم فإن:

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \\ &= 1 - e^{-3} - 3e^{-3} \\ &= 1 - 4e^{-3} \end{aligned}$$

٢- ليكن Y هو عدد المكالمات التي تصل إلى التحويلة في 10 دقائق. إذن Y يتبع

توزيع بواسون بالمتوسط $2.5 = \frac{10\times15}{60}$ ، ومن ثم فإن احتمال عدم وصول مكالمات في عشر دقائق هو:

$$P(Y=0)=\frac{(2.5)^0 e^{-2.5}}{0!}=e^{-2.5}$$

مثال (٧,٣)

تحدث أعطاب في توصيلة سلكية تحت الأرض بناء على عملية بواسون بالمعدل $\lambda = 0.1$ لكل ميل.

١- ما هو احتمال عدم وجود أعطاب في الميلين الأولين؟

٢- بشرط أنه لا يوجد أعطاب في أول ميلين، فما هو احتمال أن لا يكون هناك أعطاب بين الميل الثاني والثالث؟

الحل

بفرض أن $N(t)$ يرمز إلى عدد الأعطاب التي تحدث حتى الميل t. إذن:

١- المتغير العشوائي $N(2)$ يتبع توزيع بواسون بالمعلمة $(0.1)(2) = 0.2$. ومن ثم فإن:

$$P(N(2)=0)=e^{-0.2}=0.8187$$

٢- المتغير العشوائي $N(3)-N(2)$ مستقل عن $N(2)-N(0)$ ومن ثم فإن الاحتمال الشرطي يكون نفس الاحتمال غير الشرطي ومن ثَم:

$$P(N(3)-N(2)=0)=e^{-0.1}=0.9048$$

مثال (٧,٤)

يصل زبائن إلى مركز خدمة ما بناء على عملية بواسون بمعدل $\lambda = 4$ لكل ساعة. بفرض أن مركز الخدمة يفتح أبوابه من الساعة التاسعة صباحًا، ما هو احتمال وصول زبون واحد فقط حتى اللحظة 9:30 وأن عدد الزبائن الكلي حتى الساعة 11:30 هو خمسة؟

الحل

حيث إن $N\left(\frac{1}{2}\right)$ و $N\left(\frac{5}{2}\right)-N\left(\frac{1}{2}\right)$ يكونان مستقلين، إذن:

$$\begin{aligned} P\left\{N\left(\tfrac{1}{2}\right)=1, N\left(\tfrac{5}{2}\right)=5\right\} &= P\left\{N\left(\tfrac{1}{2}\right)=1, N\left(\tfrac{5}{2}\right)-N\left(\tfrac{1}{2}\right)=4\right\} \\ &= \frac{e^{-4(1/2)}\,4(1/2)}{1!}\,\frac{e^{-4(2)}\,[4(2)]^4}{4!} \\ &= 2e^{-2}\left(\tfrac{512}{3}e^{-8}\right) \\ &= 0.0154965 \end{aligned}$$

مثال (٧,٥)

بفرض أن زلزالاً يحدث في اليابان بناء على عملية بواسون بمعدل $\lambda = 2$ في الأسبوع.

١- أوجد احتمال حدوث على الأقل ثلاثة زلازل في أسبوعين متتاليين؟

٢- أوجد التوزيع الاحتمالي لوقت انتظار حدوث زلزال ابتداء من الآن؟

الحل

بفرض أن $N(t)$ يرمز إلى عدد الزلازل التي تحدث حتى اللحظة t.

١- من المعلوم أن $N(2)$ يتبع توزيع بواسون بالمعلمة $\lambda \times t = (2)(2) = 4$. ومن ثم فإن:

$$\begin{aligned} P(N(2)\geq 3) &= 1-P(N(2)<3) \\ &= 1-P(N(2)=0)-P(N(2)=1)-P(N(2)=2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 1-e^{-4}-4e^{-4}-\tfrac{4^2}{2}e^{-4} \\ &= 1-13e^{-4} \\ &= 0.762 \end{aligned}$$

٢- ليكن X وقت (وحدة القياس هي الأسبوع) انتظار وقوع الزلزال القادم. حيث إن الحادثة $\{X>t\}$ تحدث إذا وفقط إذا كان لم يحدث أي زلزال خلال فترة طولها t، أي أن الحادثة $\{X>t\}$ تكافئ الحادثة $\{N(t)=0\}$، ومن ثَم فإن:

$$P(X>t)=P(N(t)=0)=e^{-\lambda t},\ t\geq 0$$

ومن ثم فإن دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير X هي:

$$\begin{aligned} P(X \le t) &= 1 - P(X > t) \\ &= 1 - e^{-2t}. \end{aligned}$$

(٧,٣) الأزمنة بين الوصول
Times between arrivals

والآن سندرس الزمن بين وصولين متتالين لمتغير يتبع توزيع بواسون. يمكن التحقق من أن فترة الانتظار بين وصول ما والوصول رقم n بعده يكون عبارة عن متغير عشوائي يتبع توزيع إيرلانج $n-$ (Erlang-n). ولأي n=1 نحصل على أن زمن الوصول الداخلي (زمن الانتظار بين وصولين متتالين) interarrival time يتبع التوزيع الأسي. تبرهن النظرية التالية على صحة هذه النتيجة.

نظرية (٧,٣)

لعملية بواسون بالمعلمة λ، فإن كلاً من زمن أول وصول وزمن الانتظار بين وصولين متتالين (فترة الانتظار بين وصولين متتالين) يكون عبارة عن متغير عشوائي يتبع التوزيع الأسي بالمعلمة λ.

البرهان

ليكن X يرمز إلى زمن أول وصول (زمن الانتظار لحدوث أول وصول). إذن:

$$P(X > t) = P(N_t = 0) = e^{-\lambda t},$$

ومن ثَم فإن توزيع الاحتمال لزمن أول وصول هو $P(X \le t) = 1 - e^{-\lambda t}$ ومن ثم فإن زمن الوصول الأول يتبع توزيعاً أسياً بالمعلمة λ.

ليكن T يرمز إلى أزمنة الوصول الداخلية (زمن الانتظار بين وصولين متتالين). لحساب توزيع T نريد إثبات أنه بشرط معرفة حدوث وصول عند اللحظة τ، فإن عدد الوصول في الفترة $[\tau, \tau + t)$ يساوي صفراً. حيث إن $N_{s,t}$ يرمز إلى عدد الوصول في الفترة $[s,t)$، وحيث إننا فرضنا أنه يوجد وصول عند اللحظة τ، إذن باستخدام الخاصية (٢) من تعريف (٧,١) والجزء الأول من هذه النظرية يمكن التحقق من الآتي:

$$\begin{aligned} P(T > t) &= \lim_{h \to 0} P\left(N_{\tau+h,\tau+h+t} = 0 \mid N_{\tau,\tau+h} = 1\right) \\ &= \lim_{h \to 0} P\left(N_{\tau+h,\tau+h+t} = 0\right) \\ &= P\left(N_t = 0\right) \\ &= e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

ومن ثم فإن توزيع زمن الانتظار بين وصولين متتالين يتبع التوزيع الأسي بالمعلمة λ، وهذا يكمل البرهان.

مثال (٧,٦)

بفرض أن زلزالاً يحدث عشوائيًا في منطقة ما بناء على عملية بواسون بمعدل $\lambda = 2$ في العام. إذا حدث زلزال في الوقت الراهن فما هو احتمال الانتظار على الأقل ثلاثة أعوام قبل حدوث الزلزال المقبل (القادم).

الحل

توجد طريقتان لحل هذا المثال؛ وذلك إما باستخدام توزيع بواسون أو باستخدام التوزيع الأسي. فيما يلي سنستخدم الطريقتين في الحل:

الطريقة الأولى: بفرض أن الزلزال القادم سيحدث بعد T من الأعوام، ومن ثَم فإن T يتبع توزيعًا أسيًا بالمتوسط $\lambda = 2$ ومن ثم فإن احتمال الانتظار على الأقل ثلاثة أعوام قبل حدوث الزلازال التالي هو:

$$P(T \geq 3) = \int_3^{\infty} 2e^{-2t}\, dt = e^{-6}$$

الطريقة الثانية: ليكن X يرمز إلى عدد الزلازل التي تحدث في فترة زمنية طولها ثلاثة أعوام بعد آخر زلزال. ومن ثَم فإن X يتبع توزيع بواسون بالمتوسط $2 \times 3 = 6$، ومن ثم فإن احتمال الانتظار على الأقل ثلاثة أعوام قبل حدوث الزلازال التالي هو:

$$P(X = 0) = \frac{6^0\, e^{-6}}{0!} = e^{-6}.$$

تعطي النظرية التالية نتيجة أقوى من النتيجة المقدمة في النظرية (٧,٣).

نظرية (٧,٤)

ليكن $T_1, T_2, \cdots$ عبارة عن الأزمنة المتتالية لوصول متتالي لعملية وصول $\{N_t\}$. إذن $\{N_t\}$ تكون عبارة عن عملية بواسون بالمعلمة λ إذا كانت وفقط إذا كانت المتغيرات العشوائية $T_1, T_2 - T_1, T_3 - T_2, \cdots$ مستقلة ومتطابقة ولها توزيع أسي بالمعلمة λ.

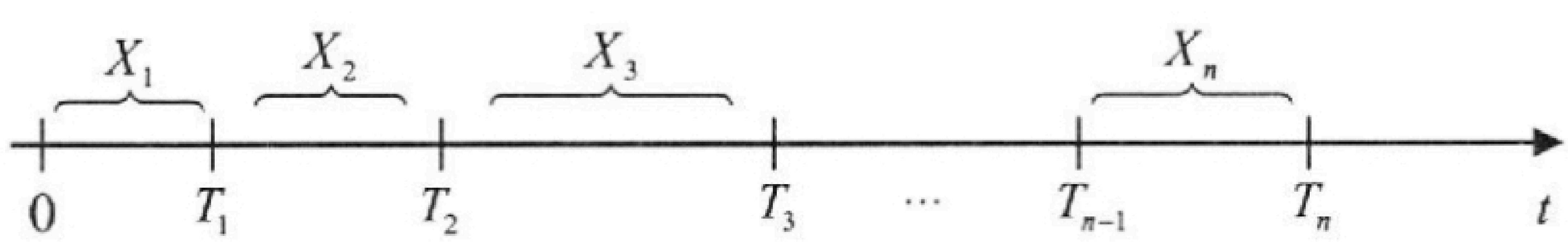
البرهان

يترك كتمرين.

مثال (٧,٧)

لنفرض أن زمن حياة وحدة ما يتبع توزيعاً أسياً بالمعلمة $\lambda = 2$، عندما تتعطل هذه الوحدة يتم استبدالها مباشرة بوحدة أخرى جديدة مطابقة للوحدة الأصلية، وعندما تتعطل الوحدة الجديدة يتم استبدالها بأخرى متطابقة، ... إلخ. وهذا يعني أن أزمنة الحياة للوحداة المتعاقبة في الاستخدام $X_1, X_2, \cdots$ تكون عبارة عن متغيرات عشوائية مستقلة ومتطابقة ولها نفس التوزيع الأسي:

$$P(X_n \le t) = 1 - e^{-\lambda t}, t \ge 0, n = 1,2,\cdots$$



شكل (٧,٢): أزمنة الاخفاقات المتتالية.

إذا كان $T_1, T_2, \cdots$ عبارة عن الأزمنة المتعاقبة للإخفاقات المتتالية، إذن $T_1 = X_1$، $T_2 = X_1 + X_2$، ....، انظر الشكل (٧,٢). من السهل التحقق من أن $T_1, T_2, \cdots$ تحقق شروط النظرية (٧,٤). ومن ثَم فإنه إذا كان N_t يرمز إلى عدد الإخفاقات في الفترة $[0,t]$، إذن يمكن اتباع نظرية (٧,٤) في التحقق من أن $\{N_t; t \ge 0\}$ تكون عملية بواسون بالمعدل λ.

ملاحظة (٧,٣)

باتباع خاصية أن $X_{n+1} = T_{n+1} - T_n$ يتبع توزيعاً أسياً بالمعلمة λ، يمكن الحصول

على متوسط وتباين الزمن بين أي وصولين متتالين كالآتي:

$$E\left[T_{n+1}-T_n\right]=E\left[X_{n+1}\right]=\frac{1}{\lambda},$$

$$\mathrm{Var}\left[T_{n+1}-T_n\right]=\mathrm{Var}\left[X_{n+1}\right]=\frac{1}{\lambda^2}$$

وبكتابة $T_n=T_1+\left(T_2-T_1\right)+\cdots+\left(T_n-T_{n-1}\right)$ يمكن الحصول على:

$$\begin{aligned}E\left[T_n\right]&=E\left[X_1+X_1+\cdots+X_n\right]\\&=nE\left[X_1\right]\\&=\frac{n}{\lambda},\end{aligned}$$

$$\mathrm{Var}\left[T_n\right]=\mathrm{Var}\left[X_1+X_1+\cdots+X_n\right]$$

وحيث إن $X_1,X_2,\cdots$ مستقلة ومتطابقة، إذن:

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\left[T_n\right]&=\mathrm{Var}\left[X_1\right]+\mathrm{Var}\left[X_2\right]+\cdots+\mathrm{Var}\left[X_n\right]\\&=n\mathrm{Var}\left[X_1\right]=\frac{n}{\lambda^2}\\&=\frac{n}{\lambda^2}\end{aligned}$$

مثال (٧,٨)

بالعودة إلى مثال (٧,٧) وبفرض أن $\lambda=0.0002$ (مقياس وحدة الزمن هو ساعة). إذن متوسط زمن حياة الوحدة في الاستخدام هو: $E\left[X_1\right]=\frac{1}{\lambda}=5000$ *ساعة* والتباين هو: ساعة[٢] $\mathrm{Var}\left[X_1\right]=\frac{1}{\lambda^2}=25\times10^6$. ومن ثم فإنه إذا كانت مُعَدَّة مكون من ثلاثة أجزاء متصلة بحيث أنه بمجرد أن يتعطل الجزء الأول يبدأ الثاني في العمل، ويبدأ الثالث في العمل بمجرد أن يتعطل الثاني، ومن ثَم فإن زمن المُعَدَّة هو $T_3=X_1+X_2+X_3$، ومن ثَم فإن متوسط وتباين T_3 هما $E\left[T_3\right]=\frac{3}{\lambda}=15000$ ساعة، $\mathrm{Var}\left[T_3\right]=\frac{3}{\lambda^2}=75\times10^6$ ساعة[٢].

مثال (٧,٩)

بالعودة إلى مثال (٧,٧) ولنفرض أنه سيتم استبدال الوحدة بمجرد أن تتعطل، ونفرض أيضًا أن تكلفة عملية الاستبدال هي β من الريالات، وأن معدل الخصم على المال (discount rate of money) هو $\alpha > 0$، ومن ثَم فإن القيمة الشرائية لريالٍ واحد بعد مرور فترة زمنية طولها t تساوي القيمة الشرائية في الوقت الراهن للمبلغ $e^{-\alpha t}$ من الريالات (وبمعنى آخر فإن α تكون عبارة عن معدل الفائدة). ومن ثَم فإن زمن الإخفاق رقم n هو T_n والقيمة الحالية لتكلفة الاستبدال هي $\beta e^{-\alpha T_n}$. ولحساب القيمة الحالية لتكلفة جميع عمليات الاستبدال في المستقبل نقوم بتجميع جميع القيم الحالية لتكلفة الاستبدال رقم n على جميع القيم الممكنة لـــ n، ويقودنا ذلك إلى النتيجة التالية:

$$C = \sum_{n=1}^{\infty} \beta e^{-\alpha T_n}$$

والمطلوب هو حساب القيمة المتوقعة الحالية لتكلفة الاستبدال. حيث إن القيمة المتوقعة للمجموع تكون عبارة عن مجموع التوقعات، إذن:

$$E[C] = \beta \sum_{n=1}^{\infty} E\left[e^{-\alpha T_n}\right]$$

لأي قيمة محددة لـــ n، يمكن كتابة $T_n = T_1 + (T_2 - T_1) + \cdots + (T_n - T_{n-1})$، حيث إن $T_1, (T_2 - T_1), \cdots, (T_n - T_{n-1})$ تكون مستقلة ومتطابقة، إذن:

$$\begin{aligned} E\left[e^{-\alpha T_n}\right] &= E\left[e^{-\alpha T_1} e^{-\alpha (T_2 - T_2)} \cdots e^{-\alpha (T_n - T_{n-1})}\right] \\ &= E\left[e^{-\alpha T_1}\right] E\left[e^{-\alpha (T_2 - T_2)}\right] \cdots E\left[e^{-\alpha (T_n - T_{n-1})}\right] \\ &= \left\{E\left[e^{-\alpha T_1}\right]\right\}^n \end{aligned}$$

وحيث إن T_1 يتبع توزيعاً أسياً بالمعلمة λ، إذن:

$$\begin{aligned} E\left[e^{-\alpha T_1}\right] &= \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \lambda \int_0^{\infty} e^{-(\alpha + \lambda) x} dx \\ &= \frac{\lambda}{\alpha + \lambda} \end{aligned}$$

ومن ثَم وباستخدام العلاقة $1+x+x^2+\cdots=\frac{1}{1-x}$ لأي $x\in[0,1)$، يمكن الحصول على:

$$E[C]=\beta\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\alpha+\lambda}\right)^n=\beta\frac{\lambda}{\alpha+\lambda}\left(1-\frac{\lambda}{\alpha+\lambda}\right)^{-1}=\frac{\beta\lambda}{\alpha}$$

وكحالة خاصة نفرض أن زمن الحياة هو 5000 ساعة وأن تكلفة الإحلال هي 800 ريال ومعدل الفائدة يساوي 24% في العام، إذن $\beta=800$ ، $\lambda=\frac{1}{5000}$ ، $\alpha=\frac{0.24}{365\times24}=\frac{0.01}{365}$ ومن ثَم فإن $E[C]=\frac{800\times36500}{5000}=5840$ من الريالات.

وبالرغم من أنه يمكن عمل العديد من الحسابات بدون استنتاج توزيع المتغير العشوائي إلا أنه يوجد كثير من المواضع التي نحتاج فيها إلى هذا التوزيع. إحدى الطرق التي يمكن اتباعها في الحصول على التوزيع هي طريقة معكوس تحويل لابلاس Laplace transform للمتغير T_n، $E\left[e^{-sT_n}\right]=\left(\frac{\lambda}{s+\lambda}\right)^n$ لأي $s>0$. وعمومًا فإنه من السهل أن نستخدم حقيقة أنه لأي $n\ge0$ ، $t\ge0$ فإن:

$$\{T_n\le t\}=\{N_t\ge n\} \tag{٧,٣}$$

باستخدام علاقة المساواة (٧,٣) مع نظرية (٧,٢) يمكن برهان النظرية التالية.

نظرية (٧,٥)

لأي $n\ge0$ ، فإن توزيع المتغير العشوائي T_n يُعطى بالعلاقة التالية:

$$P\{T_n\le t\}=1-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\lambda t)^k\,e^{-\lambda t}}{k!},\ t\ge0.$$

البرهان

حيث إن:

$$\begin{aligned}P\{T_n\le t\}&=P\{N_t\ge n\}\\&=1-P\{N_t<n\}\\&=1-\sum_{k=0}^{n-1}P\{N_t=k\}\end{aligned}$$

وحيث إن N_t يتبع توزيع بواسون بالمعلمة λt، إذن بالتعويض عن توزيع بواسون في العلاقة السابقة نحصل على توزيع T_n، وبه نكمل برهان النظرية.

يعرف توزيع المتغير العشوائي T_n، المُعطى في النظرية السابقة، بتوزيع إيرلانج-n. وينتمي هذا التوزيع إلى عائلة توزيعات جاما، وهو قابل للاشتقاق ومشتقته هي:

$$\frac{\lambda(\lambda t)^{n-1} e^{-\lambda t}}{(n-1)!}, t \geq 0 \qquad (٧,٤)$$

مثال (٧,١٠)

تصل مكالمة هاتفية إلى تحويلة هاتف بناء على عملية بواسون بمعدل مكالمتين في الدقيقة. إذا تم استقبال مكالمة للتو، فما هو احتمال استقبال المكالمات الثلاث التالية بعد دقيقتين؟

الحل

لنفرض أن المكالمات الثلاث التالية ستصل بعد T_3 من الدقائق. إذن المطلوب هو حساب $P(T_3 > 2)$. لدينا:

$$\begin{aligned}
P(T_3 > 2) &= \mathrm{P}\{\text{عدد المكالمات في } (0,2) \text{ أقل من أو يساوي } 2\} \\
&= \sum_{n=0}^{2} P\{\text{عدد المكالمات في } (0,2) \text{ يساوي } n\} \\
&= \sum_{n=0}^{2} \frac{(2\times 2)^n e^{-(2\times 2)}}{n!} \\
&= 13e^{-4}
\end{aligned}$$

وبطريقةٍ أخرى، يمكن الحل كالآتي:

$$\begin{aligned}
P(T_3 > 2) &= 1 - P(T_3 \leq 2) \\
&= 1 - P(N_2 \geq 3) \\
&= P(N_2 < 3) \\
&= \sum_{n=0}^{2} P\{\text{عدد المكالمات في } (0,2) \text{ يساوي } n\} \\
&= 13e^{-4}
\end{aligned}$$

كما نلاحظ أنه يمكن الحصول على نفس الحل مباشرة باستخدام النظرية (٧,٥).

مثال (٧,١١)

لنأخذ نقطة معينة على طريق سريع، ولنفرض أن $U_1, U_2, \cdots$ عبارة عن أوقات الانتظار الداخلية (أزمنة الوصول بين كل سيارتين متعاقبتين) للوصول المتعاقب للمركبات عند هذه النقطة. لنفرض أن $U_1, U_2, \cdots$ تكون مستقلة ومتطابقة بالتوزيع التالي:

$$P(U_k \le t) = 1 - e^{-\lambda t} - \lambda t\, e^{-\lambda t}, t \ge 0$$

والمطلوب هو تحديد التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي الذي يمثل عدد المركبات التي تعبر هذه النقطة في الفترة $[0,t]$.

الحل

لنفرض أن M_t يرمز إلى عدد المركبات التي تعبر النقطة في الفترة $[0,t]$ ، إذن المطلوب هو استنتاج توزيع المتغير العشوائي M_t. نلاحظ أولاً أن المتغير العشوائي U_k يتبع توزيع إيرلانج-2. ومن ثَم فإنه يمكن تفسير كل من U_k على أنه مجموع زمني وصولين متعاقبين لعملية بواسون بالمعلمة λ. وهذا يعني أنه يمكن اعتبار أزمنة عبور المركبات النقطة المحددة على أنه $U_1 = T_2$ ، $U_1 + U_2 = T_4$ ، $U_1 + U_2 + U_3 = T_6$ ، ...، حيث إن $T_1, T_2, \cdots$ تكون عبارة عن أزمنة الوصول في عملية بواسون $\{N_t\}$ بالمعلمة λ. ومن ثَم فإن $M_t = 6$ إذا وفقط إذا كان عملية بواسون N_t لها 12 وصول أو 13 وصولاً في الفترة $[0,t]$. ومن ثَم لأي $t \ge 0$ فإن:

$$\begin{aligned} P(M_t = k) &= P(N_t = 2k) + P(N_t = 2k+1) \\ &= \frac{(\lambda t)^{2k}\, e^{-\lambda t}}{(2k)!} + \frac{(\lambda t)^{2k+1}\, e^{-\lambda t}}{(2k+1)!}, \quad k = 0,1,\cdots \end{aligned}$$

ملاحظة (٧,٤)

١- نلاحظ أن دالة الكثافة الاحتمالية تكون مطردة الزيادة. ومن ثَم فإن احتمال وقوع أزمنة الوصول الداخلية في الفترة (تأخذ قيمًا في الفترة) $[0,s]$ يكون أكبر من وقوعها في الفترة $[t, t+s]$ وذلك لأي $t > 0$. ومن ثم فإن عملية بواسون يكون

لها عدد من الفترات القصيرة أكبر من عدد الفترات الطويلة. أي أن احتمال وقوع طول فترة زمن الوصول الداخلي في الفترة $[0,s]$ يكون أكبر من احتمال وقوعه في الفتر ة $[t,t+s]$ ، وذلك لأي $t>0$.

٢-التوزيع الأسي السالب يكون توزيع مرافق لتوزيع بواسون في عملية بواسون حسب المفهوم التالي. أزمنة الوصول الداخلية في عملية نقطة point process تضمن أن عدد الوصول في فترة معينة يكون متغيراً عشوائياً يتبع توزيع بواسون وأن عملية الوصول تكون عملية بواسون. وبالعكس، بفرض أن عدد الوصول في أي فترة زمنية يكون متغيراً عشوائياً له توزيع بواسون، إذن أزمنة الوصول الداخلية تكون متغيرات عشوائية تتبع التوزيع الأسي، وعملية الوصول تكون عملية بواسون. يستخدم التوزيع الأسي بكثرة في النمذجة العشوائية وذلك بسبب بساطته التي تقود إلى تسهيل عملية الحسابات بالإضافة إلى أنه يتمتع بخاصية فقدان الذاكرة، وهذا هو الهدف الرئيس في البند التالي.

(٧,٤) خاصية فقدان الذاكرة

Memoryless property

يقال للمتغير العشوائي X أنه يحقق خاصية فقدان الذاكرة memoryless property أو توزيع الاحتمال للمتغير العشوائي X يكون فاقداً للذاكرة إذا وفقط إذا كان:

$$P(X>x+t\,|\,X>t)=P(X>x)$$

وهذا يعني أن زمن الوصول التالي يكون مستقلاً عن أزمنة الوصول التي تسبق زمن الوصول الراهن. التوزيع الأسي هو التوزيع الوحيد الذي يحقق هذه الخاصية كما توضحه النظرية التالية.

نظرية (٧,٦)

المتغير العشوائي المتصل يحقق خاصية فقدان الذاكرة إذا وفقط إذا كان يتبع توزيعاً

أسياً.

البرهان

أولاً نفرض أن X متغير عشوائي يتبع توزيعًا أسياً بالمعلمة $\lambda > 0$، أي أن $P(X \le x) = 1 - e^{-\lambda x}$. ومن ثَم فإن:

$$\begin{aligned} P(X > t + x \mid X > t) &= \frac{P(X > t + x, X > t)}{P(X > t)} \\ &= \frac{P(X > t + x)}{P(X > t)} \\ &= \frac{e^{-\lambda(t+x)}}{e^{-\lambda t}} \\ &= e^{-\lambda x} = P(X > x) \end{aligned}$$

إذن المتغير X يحقق خاصية فقدان الذاكرة.

والآن نفرض أن X يحقق خاصية فقدان الذاكرة، والمطلوب برهان أنه يتبع توزيعًا أسياً. بفرض أن $F(x)$ هو التوزيع الاحتمالي للمتغير X، وأن $H(x) = 1 - F(x)$، إذن لدينا:

$$H(x) = P(X > x)$$

باستخدام خاصية فقدان الذاكرة نحصل على:

$$\begin{aligned} H(x) &= P(X > t + x \mid X > t) \\ &= \frac{P(X > t + x, X > t)}{P(X > t)} \\ &= \frac{P(X > t + x)}{P(X > t)} \\ &= \frac{H(x+t)}{H(t)} \end{aligned}$$

ومن ثم فإن $H(x)H(t) = H(x+t)$. وحيث إن $0 \le H(x) \le 1$، إذن باتباع الطريقة المستخدمة في برهان النظرية (٧,١) يمكن التحقق من أن $H(x) = e^{-\lambda x}$ لقيمة $\lambda > 0$، ومن

ثَمفإن X يتبع توزيعًا أسياً بالمعلمة λ كما هو مطلوب، وهذا يكمل البرهان.

ملاحظة (٧,٥)

توجد نتيجة مناظرة في حالة المتغيرات العشوائية المتقطعة وهي أن المتغير الهندسي هو التوزيع المنفصل الوحيد الذي يتمتع بخاصية فقدان الذاكرة. برهان هذه النتيجة يشبه برهان النظرية (٧,٦) انظر تمرين (٧,٨).

(٧,٥) الأزمنة الارتدادية الأمامية

Forward recurrence times

ليكن $\{N_t\}$ عملية بواسون بالمعلمة λ، وأن T_1، T_2، ...عبارة عن متتابعة من أزمنة الوصول المتتالية وبفرض أن $T_0 = 0$. لأي $t \geq 0$ فإن عدد الوصول في الفترة $[0,t]$ هو N_t، وزمن آخر وصول قبل اللحظة t هو T_{N_t}، وزمن الوصول التالي هو T_{N_t+1}. الزمن منذ آخر وصول يكون $t - T_{N_t}$، وطول الانتظار من اللحظة t حتى الوصول التالي هو:

$$V_t = T_{N_t+1} - t$$

في المثال (٧,٧) رمزنا بـــ V_t إلى الزمن المتبقي لوحدة في الاستخدام عند اللحظة t.

نظرية (٧,٧)

الاحتمال الشرطي التالي:

$$P(V_t \leq u \,|\, N_s; s \leq t) = 1 - e^{-\lambda s}, \; u \geq 0$$

يكون مستقلاً عن t.

البرهان

حيث إن:

$$\begin{aligned}
\{V_t \leq u\} &= \{T_{N_t+1} - t \leq u\} \\
&= \{T_{N_t+1} - t > u\}^C \\
&= \{T_{N_t+1} > u + t\}^C \\
&= \{N_{t+u} - N_t = 0\}^C
\end{aligned}$$

إذن:

$$\begin{aligned} P(V_t \le u \mid N_s; s \le t) &= P\left(\{N_{t+u} - N_t = 0\}^C \mid N_s; s \le t\right) \\ &= 1 - P(N_{t+u} - N_t = 0 \mid N_s; s \le t) \\ &= 1 - P(N_{t+u} - N_t = 0) \\ &= 1 - P(N_u = 0) \\ &= 1 - e^{-\lambda s}. \end{aligned}$$

وهذا يعني أن زمن انتظار الوصول التالي بعد اللحظة t يكون مستقلاً عن حالة العملية حتى اللحظة t. وعلاوة على ذلك فإن له نفس التوزيع الذي يسلكه أي زمن وصول داخلي. وبشكل خاص لايعنينا طول الوقت الذي مضى بعد آخر وصول، فإن احتمال الانتظار لعدد من الوحدت مقداره u للوصول التالي يظل نفسه.

وكنتيجة، لدينا $E[V_t] = \frac{1}{\lambda}$. لاحظ أن $E[T_{n+1} - T_{N_t}] = \frac{1}{\lambda}$ ومن ثَم فإن:

$$\begin{aligned} E[T_{N_t+1} - T_{N_t}] &= E[T_{N_t+1} - t + t - T_{N_t}] \\ &= E[T_{N_t+1} - t] + E[t - T_{N_t}] \\ &= \tfrac{1}{\lambda} + E[t - T_{N_t}] \end{aligned}$$

ومن ثَم فإن الفترة $[T_{N_t}, T_{N_t+1})$ والتي تغطي اللحظة t في المتوسط تكون أطول من أي فترة عادية أخرى $[T_n, T_{n+1})$ بين وصولين.

مثال (٧,١٢)

لنفرض أن وصول الحافلات إلى محطة حافلات يكون بناء على عملية بواسون بمعدل حافلة واحدة كل خمس دقائق، وأنك وصلت إلى المحطة في المساء عند اللحظة $t = 617.23$ (الوقت مقاس من الساعة 7:00 صباحًا). تضمن النظرية (٧,٧) أن زمن الانتظار حتى تصل أول حافلة يكون له نفس التوزيع الذي يتبعه زمن الانتظار إذا كان بمجرد وصولك إلى المحطة لم تتمكن من إدراك آخر حافلة. متوسط زمن انتظار الحافلة التالية هو 5 دقائق. وفي الحقيقة أنه يمكن توضيح أن متوسط زمن الانتظار بعد وصول آخر حافلة هو 5 دقائق (وهذه الأخيرة تعتمد في العموم على t ولكنها تصبح 5 لقيم t الكبيرة). بمقارنة الطول المتوقع للفترة التي وصلت خلالها (بالتحديد 10 دقائق) بادعاء أصحاب شركة الحافلات أنه تصل حافلة كل

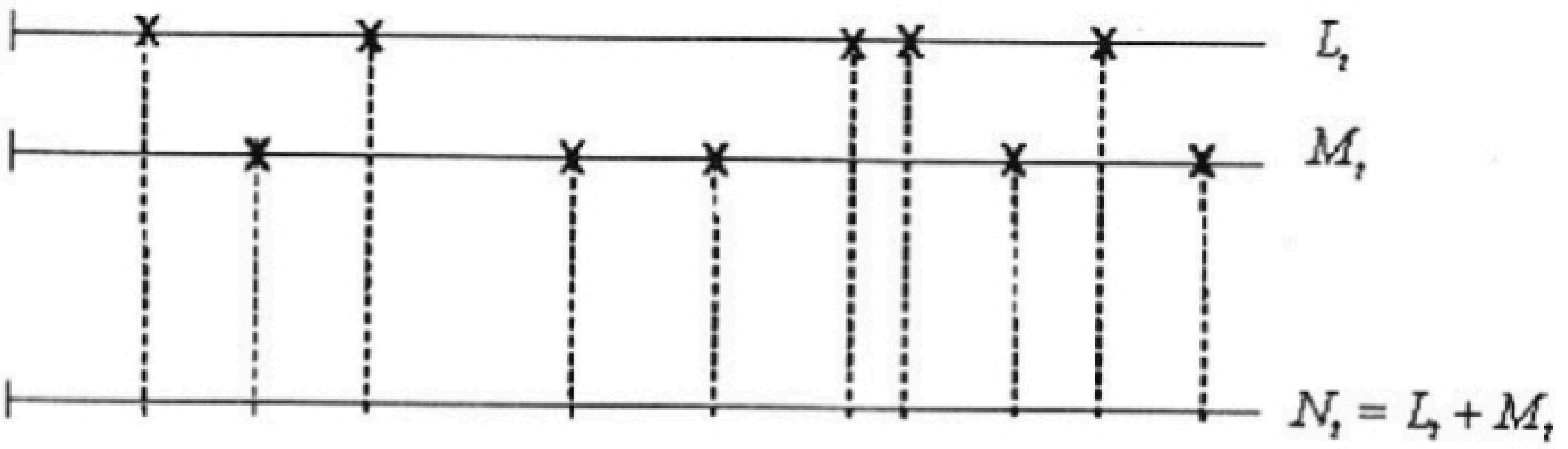
خمس دقائق في المتوسط، يبدو أن هناك تناقض. إلا أنه في الحقيقة لا يوجد أي تناقض وذلك لأن متوسط طول الفترة التي وصلت خلالها يكون أكبر من متوسط الزمن بين وصول أي حافلتين متتاليتين.

(٧,٦) الوضع العلوي لعمليات بواسون
Superposition of Poisson processes

ليكن $\{L_t\,;\,t\ge 0\}$ ، $\{M_t\,;\,t\ge 0\}$ عمليتا بواسون مستقلتين بالمعلمتين λ و μ ، على الترتيب. ولأي $t \ge 0$ نفرض أن:

$$N_t = L_t + M_t$$

فإن العملية العشوائية $\{N_t\,;\,t\ge 0\}$ تسمى عملية الوضع العلوي للعمليتين، انظر الشكل (٧,٣).



شكل (٧,٣): أزمنة وصول عملية الوضع العلوي N_t والتي تم الحصول عليها بوضع أزمنة وصول العمليتين M_t ، L_t معاً.

نظرية (٧,٨)

العملية العشوائية $\{N_t\,;\,t\ge 0\}$ تكون عملية بواسون بالمعدل $\lambda+\mu$.

البرهان

لدينا لأي $n = 0,1,2,\cdots$

$$
\begin{aligned}
P\left(N_{s,s+t}=n\right) &= \sum_{k=0}^{n} P\left(L_{s,s+t}=k, M_{s,s+t}=n-k\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} P\left(L_{s,s+t}=k\right) P\left(M_{s,s+t}=n-k\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!} \frac{e^{-\mu t}(\mu t)^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= \frac{e^{-(\lambda+\mu)t}(\lambda+\mu)^n t^n}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n-k} \\
&= \frac{e^{-(\lambda+\mu)t}(\lambda+\mu)^n t^n}{n!}\left[\frac{\lambda}{\lambda+\mu}+\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right]^n \\
&= \frac{e^{-(\lambda+\mu)t}\left((\lambda+\mu)t\right)^n}{n!}
\end{aligned}
$$

ومن ثم فإن $N_{s,s+t}$ يتبع توزيع بواسون بالمعدل $\lambda+\mu$، وبذلك فإن $\{N_t\,;\,t\geq 0\}$ تكون عملية بواسون بالمعدل $\lambda+\mu$ (المجموع في الخطوة قبل الأخيرة يساوي واحداً وذلك لأنه عبارة مجموع التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي يتبع توزيع ذي الحدين بالمعلمتين n، $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$).

مثال (٧,١٣)

ليكن L_t يرمز إلى عدد المركبات التي تصل إلى أحد التقاطعات في الفترة $[0,t)$ من اتجاه ما، وأن M_t يرمز إلى عدد المركبات التي تصل إلى نفس التقاطع في الفترة $[0,t)$ من اتجاه آخر. ومن ثَم فإن N_t يرمز إلى عدد المركبات التي تصل إلى ذلك التقاطع في الفترة $[0,t)$ من كلا الاتجاهين. إذا كان الوصول من كلا الاتجاهين يتبع عملية بواسون بالمعدلين λ، μ فإن عملية الوصول الكلي تتبع عملية بواسون بالمعدل $\lambda+\mu$.

(٧,٧) تفكك عملية بواسون

Decomposition of a Poisson process

ليكن $\{N_t\,;t\geq 0\}$ عملية بواسون بالمعلمة λ، وليكن $\{X_n\,;n=1,2,\cdots\}$ عبارة عن عملية برنوللي باحتمال النجاح p ومستقلة عن $\{N_t\,;t\geq 0\}$، ولنفرض أن S_n هو عدد

مرات النجاح خلال عدد n من المحاولات الأولى. ولنفرض أيضاً أن المحاولة رقم n قد نفذت عند اللحظة T_n، زمن الوصول رقم n. عدد المحاولات التي نفذت في الفترة $[0,t)$ هو N_t ومن ثم فإن عدد النجاحات الحاصلة في الفترة $[0,t)$ هي:

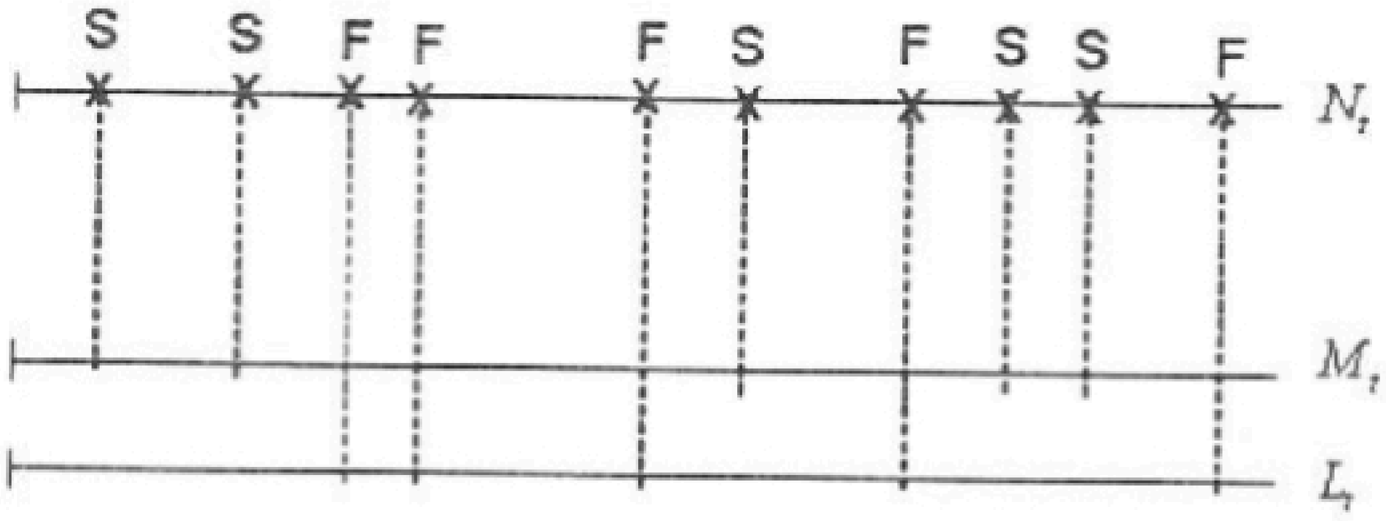
$$M_t = S_{N_t} \tag{٧,٥}$$

وعدد مرات الفشل تكون، انظر الشكل (٧,٤)،

$$L_t = N_t - M_t \tag{٧,٦}$$

ولنفرض أن $T_0 = 0$. لأي $t \geq 0$ فإن عدد الوصول في الفترة $[0,t]$ هو N_t وزمن آخر وصول قبل اللحظة t هو T_{N_t} وزمن الوصول التالي هو T_{N_t+1}. والزمن منذ آخر وصول يكون $t - T_{N_t}$ وطول الانتظار من اللحظة t حتى الوصول التالي هو:

$$V_t = T_{N_t+1} - t$$



شكل (٧,٤): أزمنة وصول N_t والتي عندها تُكون النجاحات المتتالية العملية M_t والفشل المتتالي يُكون العملية L_t.

نظرية (٧,٩)

العمليتان العشوائيتان $\{M_t\,;\, t \geq 0\}$، $\{L_t\,;\, t \geq 0\}$ تكونان عمليتا بواسون بالمعدلين λp، λq، ($q = 1 - p$)، على الترتيب وهما مستقلتان.

البرهان

لبرهان هذه النظرية يكفي أن نثبت أنه لأي $s,t \geq 0$، $k,m = 0,1,\cdots$ فإن:

$$P\left(M_{s+t} - M_t = m, L_{s+t} - L_t = k \mid M_u, L_u; u \leq t\right) = \frac{e^{-\lambda ps}(\lambda ps)^m}{m!} \frac{e^{-\lambda qs}(\lambda qs)^k}{k!}$$

(٧,٧)

الحادثة:

$$\{M_{s+t}-M_t=m, L_{s+t}-L_t=k\}$$

تكافئ الحادثة:

$$\{N_{s+t}-N_t=m+k, M_{s+t}-M_t=m\}$$

والتي بدورها تكافئ الحادثة:

$$A=\{N_{s+t}-N_t=m+k, S_{N_{s+t}}-S_{N_t}=m\}$$

ومن الناحية الأخرى فإن عائلة المتغيرات العشوائية $\{M_u, L_u; u\le t\}$ تكافئ العائلة $H=\{N_u; u\le t; X_1, X_2, \cdots, X_{N_t}\}$. وحيث إن $\{M_u, L_u; u\le t\}$ عملية بواسون، والعمليتين N، وS مستقلتان إذن المتغير العشوائي $N_{t+s}-N_t$ يكون مستقلاً عن H، وبالمثل إذا كان عدد النجاحات في المحاولات ذات الأرقام N_{t+1}، N_{t+2}، ...، N_{t+s} ومستقلاً عن الماضي $X_1, X_2, \cdots, X_{N_t}$ والعمليتان N، وS مستقلتين إذن المتغير العشوائي $S_{N_{t+s}}-S_{N_t}$ يكون مستقلاً عن H. ومن ثم فإن الحادثة A تكون مستقلة عن H وبذلك نحصل على الطرف الأيسر للعلاقة (٧,٧) على النحو التالي:

$$\begin{aligned}
P(A) &= P\{N_{s+t}-N_t=m+k, S_{N_{s+t}}-S_{N_t}=m\}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P\{N_t=n, N_{s+t}-N_t=m+k, S_{N_{s+t}}-S_{N_t}=m\}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P\{N_t=n, N_{s+t}=m+k+n, S_{m+k+n}-S_n=m\}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P\{N_t=n, N_{s+t}=m+k+n\} P\{S_{m+k+n}-S_n=m\}
\end{aligned}$$

وذلك باستخدام خاصية الاستقلال بين N، وS. ولأن $S_{n+m+k}-S_n$ له نفس توزيع المتغير العشوائي S_{m+k} إذن:

$$\begin{aligned}
P(A) &= \sum_{n=0}^{\infty} P\{N_t=n, N_{s+t}-N_t=m+k\} P\{S_{m+k}=m\}\\
&= P\{N_{s+t}-N_t=m+k\} P\{S_{m+k}=m\}\\
&= \frac{e^{-\lambda s}(\lambda s)^{m+k}}{(m+k)!}\frac{(m+k)!}{m!k!} p^m q^k
\end{aligned}$$

والذي يساوي الطرف الأيمن للعلاقة (٧,٧) وهذا يكمل البرهان.

مثال (٧,١٤)

تصل مركبات إلى نقطة تحويل في أحد الطرق ثم تتحول إلى اليمين باحتمال 0.6 أو إلى اليسار باحتمال 0.4 بشكل مستقل. تمثل عملية الوصول إلى هذه التحويلة بعملية بواسون بالمعدل $\lambda = 30$ عربة في الدقيقة. إذن المركبات التي تتحول إلى اليسار تكون عملية بواسون بالمعدل $30 \times 0.6 = 18$ عربة في الدقيقة، والمركبات التي تتحول إلى اليمين تكون عملية بواسون بالمعدل $30 \times 0.4 = 12$ عربة في الدقيقة.

مثال (٧,١٥)

عملية وقوف المركبات عند أحد المطاعم على أحد جانبي طريق سريع تكون عملية بواسون بالمعدل $\lambda = 20$ في الساعة. تحتوي المركبة على شخص أو شخصين أو ثلاثة أو أربعة أو خمسة أشخاص باحتمالات 0.3، 0.3، 0.2، 0.1، 0.1 على الترتيب. نريد حساب العدد المتوقع للأشخاص الذين يصلون إلى المطعم خلال ساعة.

لنفرض أن N^1 ، N^2 ،...، N^5 عدد المركبات التي تصل خلال ساعة وتحتوي على شخص، أو شخصين،...،أو خمسة أشخاص على الترتيب. بناء على نظرية (٧,٨) فإن المتغيرات العشوائية N^1 ، N^2 ،...، N^5 تتبع توزيع بواسون بالمعدلات $20 \times 0.3 = 6$ ، 6 ، $20 \times 0.2 = 4$ ، $20 \times 0.1 = 2$ ، 2 على الترتيب. ومن ثَم فإن $E[N^1] = E[N^2] = 6$ ، $E[N^3] = 4$ ، $E[N^4] = E[N^5] = 2$ ومن ثم فإن العدد المتوقع للأشخاص الذين يصلون إلى المطعم خلال ساعة هو:

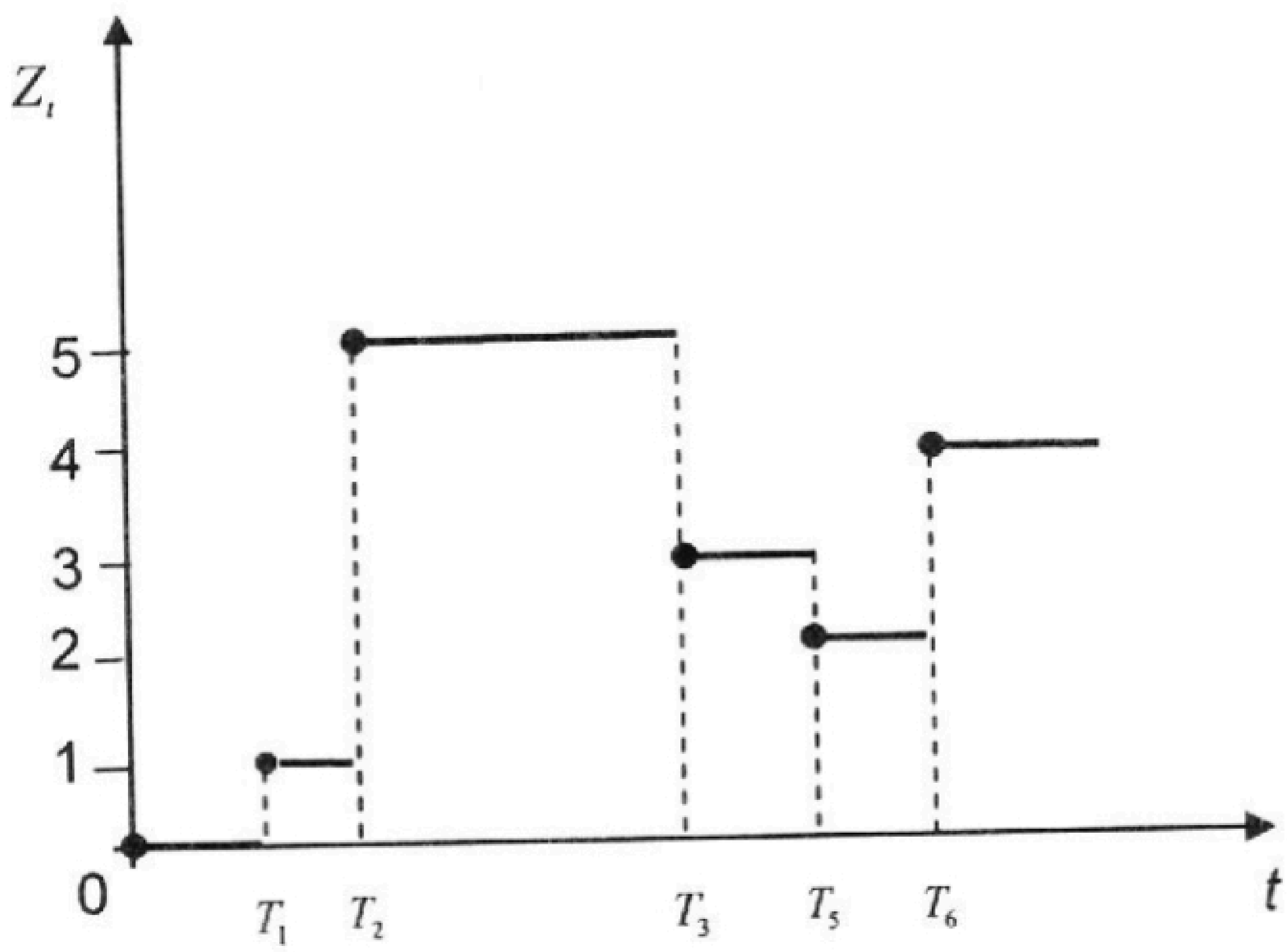
$$E[N^1 + 2N^2 + 3N^3 + 4N^4 + 5N^5] = 6 + 2 \times 6 + 3 \times 4 + 4 \times 2 + 5 \times 2 = 48$$

(٧,٨) عمليات بواسون المركبة
Compound Poisson process

حتى الآن فرضنا أن القفزات في عملية بواسون كانت وحدة الحجم. والآن سنحذف هذا الفرض وسنسمح بقفزات بأي حجم.

فيما يلي سنأخذ العملية العشوائية $Z = \{Z_t ; t \geq 0\}$ حيث إن الدالة $t \to Z_t$

تكون متصلة من اليمين وتأخذ قيماً حقيقية متزايدة أو متناقصة فقط مع القفزات وتكون $Z_0 = 0$ ، انظر الشكل (٧,٥).



شكل (٧,٥): عملية مركبة لبواسون تتزايد أو تتناقص بقيم عشوائية عند أزمنة الوصول لعملية بواسون. وكتحقيق وضعنا $T_1 = 1.5$ ، $T_2 = 3.7$ ، $T_3 = 4.2$ ، $T_4 = 4.5$ ،... وأن حجم القفزات المقابلة هو $X_1 = 2.2$ ، $X_2 = -0.8$ ، $X_3 = -1.2$ ، $X_4 = 0.5$ ، ....

تعريف (٧,٣)

يقال للعملية العشوائية $\{Z_t ; t \geq 0\}$ إنها عملية مركبة لبواسون compound Poisson process إذا تحققت الشروط التالية:

١- الدالة $t \to Z_t$ يكون لها عدد محدود من القفزات في الفترات المحدودة.

٢- لأي t ، $s \geq 0$ فإن $Z_{t+s} - Z_t$ يكون مستقلاً عن الماضي $\{Z_u ; u \leq t\}$ حتى اللحظة t.

٣- لأي $t, s \geq 0$ فإن توزيع $Z_{t+s} - Z_t$ يعتمد فقط على s (مستقل عن t).

ليكن $\{Z_t ; t \geq 0\}$ عملية مركبة لبواسون. بناء على الفرضية (١) فإن لها عدد منتهٍ من القفزات خلال أي فترة محدودة ومن ثم فإنه يمكن ترتيب الأزمنة التي تحدث عندها القفزات. لتكن $T_1, T_2, \cdots$ هي الأزمنة التي عندها أول قفزة، وثاني قفزة،... إلخ، وأن مقادير القفزات عندها على الترتيب هي $X_1, X_2, \cdots$.

بناء على الفرضية (٢) فإن عدد القفزات في الفترة $[t, t+s)$ يكون مستقلاً على تاريخ العملية في الماضي في الفترة $[0, t)$، وباتباع الفرضية (٣) فإن توزيع عدد القفزات في الفترة $[t, t+s)$ يكون مستقلاً عن t. ومن ثم فإن $T_1, T_2, \cdots$ يجب أن تكون أزمنة الوصول في عملية بواسون $\{N_t ; t \geq 0\}$، بمعنى أن N_t هو عدد قفزات Z في الفترة $[0, t)$، ومن ثَم فإن $\{Z_t ; t \geq 0\}$ تكون عملية بواسون. تختلف العملية العشوائية $\{Z_t ; t \geq 0\}$ عن $\{N_t ; t \geq 0\}$ في أن مقدار القفزات في $\{Z_t ; t \geq 0\}$ يكون عبارة عن متغير عشوائي أما في $\{N_t ; t \geq 0\}$ فتكون جميع القفزات محددة ومتساوية وتساوي الوحدة. وعلاوة على ذلك وبناء على (٢)، (٣) فإن أحجام القفزات $X_1, X_2, \cdots$ تكون عبارة عن متغيرات عشوائية مستقلة ولها نفس التوزيع والتي تكون أيضًا مستقلة عن $T_1, T_2, \cdots$.

وبالعكس فإذا كانت $T_1, T_2, \cdots$ أزمنة وصول لعملية بواسون وأن $X_1, X_2, \cdots$ متغيرات عشوائية مستقلة ولها نفس التوزيع ومستقلة عن $T_1, T_2, \cdots$ فإن العملية العشوائية $\{Z_t ; t \geq 0\}$ والتي تنتج من تجميع جميع X_i والتي تحقق أن $T_i \leq t$، بمعنى أن $Z_t = \sum_{\{i : T_i \leq t\}} X_i$، تكون عملية مركبة لبواسون. ومن ثَم يكون لدينا التخصيص الوصفي التالي:

نظرية (٧,١٠)

العملية العشوائية $\{Z_t ; t \geq 0\}$ تكون عملية مركبة لبواسون إذا وفقط إذا كانت الأزمنة التي يحدث عندها القفزات تُكون عملية بواسون وأن مقادير القفزات المتعاقبة تكون عبارة عن متغيرات عشوائية مستقلة ولها نفس التوزيع ومستقلة عن أزمنة القفزات.

مثال (٧,١٦)

تُكون عملية وصول الزبائن إلى أحد المتاجر عملية بواسون $\{N_t; t \geq 0\}$، كمية النقود المنفقة بواسطة الزبون رقم n تكون متغيراً عشوائياً X_n مستقلاً عن جميع الأزمنة التي يصل عندها الزبائن (بما فيهم الزبون رقم n) ومستقلاً أيضًا عن باقي النفقات التي ينفقها باقي الزبائن. كمية النفقات التي تدفع بواسطة أول عدد n من الزبائن هو $Y_n = X_1 + \cdots + X_n$ وذلك لأي $n \geq 1$ وأن $Y_0 = 0$. وعدد الزبائن الذين يصلون في الفترة $[0,t)$ هو N_t وكمية المبيعات التي تباع للزبائن الذين يصلون في الفترة $[0,t)$ هو $Z_t = Y_{N_t}$. فرضيتنا على العملية $\{N_t; t \geq 0\}$ والمتغير العشوائي X_n هو أن العملية $\{Z_t; t \geq 0\}$ تكون عملية مركبة لبواسون.

مثال (٧,١٧)

لنفرض أن أزمنة الأعطال المتعاقبة لجهاز حاسب آلي تكون متغيرات عشوائية مستقلة ومتماثلة وتتبع توزيعاً أسياً. ومع كل عطل يوجد ثمن تكلفة للإصلاح. التكلفة المقابلة لكل إصلاح تكون عبارة عن متغيرات عشوائية مستقلة ومتماثلة (متطابقة)، وتكلفة الإصلاح مستقلة عن الزمن الذي يحدث عنده العطل. إذا كانت Z_t هو زمن التكلفة التراكمي للإصلاحات التي تمت في الفترة $[0,t)$، إذن العملية العشوائية $\{Z_t; t \geq 0\}$ تكون عملية مركبة لبواسون.

نظرية (٧,١١)

الدالة المولدة لاحتمالات عملية بواسون المركبة $\{Z_t; t \geq 0\}$ هي:

$$E\left[u^{Z_t}\right] = e^{\lambda t(a(u)-1)},$$

حيث إن $a(u) = E\left[u^{X_i}\right]$.

البرهان

يترك كتمرين.

تُقدم النظرية التالية نتيجة أكثر شمولية:

نظرية (٧,١٢)

لنفرض أن الأزمنة التي تتم عندها القفزات في العملية العشوائية $\{Z_t ; t \geq 0\}$ تُكون عملية بواسون بالمعدل λ وأن مقادير القفزات تكون متغيرات عشوائية مستقلة ومتطابقة ولها التوزيع ϕ وتأخذ قيمًا غير سالبة ومستقلة عن الأزمنة التي تحدث عندها القفزات. ومن ثَم فإنه لأي $\alpha \geq 0$ ، $t \geq 0$ يكون:

$$E\left[e^{-\alpha Z_t}\right] = e^{-\lambda t(1-f(\alpha))}, \qquad (٧,٨)$$

حيث إن:

$$f(\alpha) = E\left[e^{-\alpha X_i}\right] = \int_0^\infty e^{-\alpha u}\, d\phi(u)$$

البرهان

باستخدام خاصية استقلال X_i عن $\{N_t ; t \geq 0\}$ وحيث إن $Z_t = X_1 + \cdots + X_n$ عندما $N_t = n$ ، $n \geq 1$ ، إذن:

$$E\left[e^{-\alpha Z_t} \mid N_t = n\right] = E\left[e^{-\alpha(X_1 + \cdots + X_n)}\right]$$

وحيث إن $X_1, \cdots, X_n$ مستقلان إذن:

$$E\left[e^{-\alpha(X_1+\cdots+X_n)}\right] = E\left[e^{-\alpha X_1}\right] \cdots E\left[e^{-\alpha X_n}\right] = \left[f(\alpha)\right]^{\alpha}$$

ومن ثَم يمكن كتابة أن:

$$E\left[e^{-\alpha Z_t} \mid N_t\right] = \left[f(\alpha)\right]^{N_t}$$

ومن ثم فإن:

$$E\left[e^{-\alpha Z_t}\right] = \left[f(\alpha)\right]^{N_t} = e^{-\lambda t(1-f(\alpha))}$$

وذلك لأنه لأي $\beta \geq 0$ يكون لدينا:

$$E\left[\beta^{N_t}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!} = e^{-\lambda t(1-\beta)}$$

(٧,٩) عمليات بواسون غير المستقرة
Non-stationary Poisson process

في العديد من التطبيقات يحتاج الأمر إلى عمليات بواسون بمعدل متغير مع الزمن، أي

أن $\lambda = \lambda(t)$. ويسمى هذا النوع من عمليات بواسون بعمليات بواسون غير المستقرة أو غير المتجانسة. لعمليات بواسون غير المستقرة بالمعدل $\lambda = \lambda(t)$ فإن مقدار التغير $N_t - N_s$ يعطي عدد الوصول في الفترة $[s,t]$ ويتبع توزيع بواسون بالمعلمة $\int_s^t \lambda(u)\,du$ ومقادير التغيُر على الفترات المتباعدة (غير المتقاطعة) تكون متغيرات عشوائية مستقلة.

مثال (٧,١٨)

تتبع عملية الطلب على خدمة متميزة في أحد الأحياء عملية بواسون غير المستقرة بالمعدل $\lambda = \lambda(t)$ والمعرف كالآتي:

$$\lambda(t) = \begin{cases} 2t, & 0 \le t < 1, \\ 2, & 1 \le t < 2, \\ 4-t, & 2 \le t \le 4, \end{cases}$$

حيث يقاس الزمن t بالساعة من فتح محل الخدمة. ما احتمال:

١- حدوث طلبين خلال أول ساعتين من بدء الخدمة.

٢- حدوث طلبين في الساعتين التاليتين؟

الحل

لأن الطلب على الفترات المتباعدة عبارة عن متغيرات عشوائية مستقلة، فإنه يمكن الإجابة عن السؤال بشكل منفصل.

١- متوسط الطلب في أول ساعتين، أي على الفترة $[0,2]$، هو:

$$\mu = \int_0^2 \lambda(t)\;dt = \int_0^1 2t\,dt + \int_1^2 2\,dt = 3$$

ومن ثَم فإن:

$$P(N_2 = 2) = \frac{e^{-3}\,3^2}{2!} = 0.2240$$

٢- بالمثل متوسط الطلب في الساعتين التاليتين، أي على الفترة $[2,4]$، هو:

$$\mu = \int_2^4 \lambda(t)\;dt = \int_2^4 (4-t)dt = 2$$

ومن ثَم فإن:

$$P(N_4 - N_2 = 2) = \frac{e^{-2}\,2^2}{2!} = 0.2707$$

(٧,١٠) تمارين

(٧,١) يصل الزبائن إلى محل حلاقة بناء على عملية بواسون بمعدل 3 أشخاص كل ساعة. باستخدام الطريقتين المقدمتين في مثال (٧,٦) أوجد احتمال عدم وصول زبائن إلى المحل في الفترة من الساعة 8 إلى الساعة 10 صباحًا.

(٧,٢) ليكن $\{N_t ; t \geq 0\}$ عملية بواسون بالمعدل $\lambda = 15$، احسب ما يلي:

١- $P(N_6 = 9)$.

٢- $P(N_6 = 9, N_{20} = 13, N_{56} = 27)$.

٣- $P(N_{20} = 13 \mid N_6 = 9)$.

٤- $P(N_6 = 9 \mid N_{20} = 13)$.

(٧,٣) ليكن $\{N_t ; t \geq 0\}$ عملية بواسون بالمعدل λ:

١-وضح أنه لأي $s < t$ فإن

$$P(N_s = k \mid N_t = n) = \binom{n}{k}\left(\frac{s}{t}\right)^k \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-k}, k = 0, 1, \cdots, n$$ ،

٢-لنفرض أن $\lambda = 3$ في الساعة، أوجد احتمال وقوع حادثتين في أول ساعة بشرط وقوع خمس حوادث في الساعات الثلاث الأولى.

(٧,٤) ليكن $\{N_t ; t \geq 0\}$ عملية بواسون بالمعدل λ، احسب $E[N_t \cdot N_{t+s}]$.

(٧,٥) ليكن $\{N_t ; t \geq 0\}$ عملية بواسون بالمعدل $\lambda = 2$، احسب:

١- $E[N_t]$ ، $\mathrm{Var}[N_t]$.

٢- $E[N_{t+s} \mid N_t]$.

(٧,٦) عدد الطائرات الخاصة التي تهبط إلى أحد المطارات يتبع عملية بواسون بقيمة متوقعة 24 خلال ثمان ساعات في يوم عمل. وبفرض أن الوقت مقاس بالساعة:

١- أوجد احتمال أن زمن الانتظار بين هبوط أي طائرتين متتاليتين يكون أقل من أو يساوي 30 دقيقة.

٢- أوجد المتوسط والانحراف المعياري للزمن بين الهبوط.

(٧,٧) تحدث العواصف الرعدية خلال فصل الصيف على إحدى المدن بناء على عملية بواسون بمعدل $\lambda = 0.8$ كل أسبوع، أوجد:

١- احتمال انتظار عاصفتين يكون أكثر من خمسة أيام.

٢- المتوسط الحسابي والانحراف المعياري لزمن مشاهدة عاصفتين.

(٧,٨) برهن الخاصية (٧,٥).

(٧,٩) يُكون وصول المسافرين عند أحد محطات الحافلات عملية بواسون بالمعدل $\lambda = \frac{1}{3}$ في الدقيقة. لنفرض أن الحافلة قد تركت المحطة للتو عند اللحظة $t = 0$ ولم تترك أياً من المسافرين عندها. وليكن T زمن وصول الحافلة التالية ومن ثم فإن عدد المسافرين عند المحطة عند لحظة وصولها هو N_T. وبفرض أن T، N مستقلان، وأن T يتبع التوزيع ϕ ، احسب مايلي:

١- $E[N_T \mid T]$، $E\left[N_T^2 \mid T\right]$.

٢- $E[N_T]$ ، $Var[N_T]$ لأي:

$$d\phi(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}dt, & 9 \le t \le 11, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

(٧,١٠) أعلن أحد المتاجر عن هدية لكل زبون يصل مع رقم 30، بفرض أن وصول الزبائن إلى هذا المتجر يُكون عملية بواسون بالمعدل λ ، أوجد دالة الكثافة الاحتمالية للأزمنة بين الوصول المحظوظ (وصول الزبائن الذين سيحصولون على هدايا).

(٧,١١) لنفرض أن عدد الوصول للزبائن في الفترة $B = (t, t+b]$ معلوم ويساوي k ولكن الأزمنة الفعلية لوصولهم غير معلومة. ومن ثَم فإن كل وصول من هذا العدد k يتبع توزيعاً منتظماً على الفترة B ومستقلاً عن باقي الـ $k-1$ وصول. بناء على هذا

التصور فإن معرفة عدد الوصول في فترة ما B لا يقدم أي معلومات عن الأزمنة التي يحدث عندها هذا الوصول (بخلاف المعلومة التافهة وهي أنهم وصلوا داخل هذه الفترة). ولصياغة هذه المسألة دعنا نفرض أن $A_1, A_2, \cdots, A_n$ فترات متباعدة اتحادها يعطي الفترة B (أي أنها تجزيء للفترة B) وأن $a_1, a_2, \cdots, a_n$ عبارة عن الأطوال المناظرة لهذه الفترات وبأخذ $b = a_1 + \cdots + a_n$. إذن لأي $k = k_1 + \cdots + k_n$، $k_1, \cdots, k_n \in \{0,1,2,\cdots\}$ فإن:

$$P\{N_{A_1} = k_1, \cdots, N_{A_n} = k_n \mid N_B = k\} = \frac{k!}{k_1! \cdots k_n!}\left(\frac{a_1}{b}\right)^{k_1} \cdots \left(\frac{a_n}{b}\right)^{k_n}$$

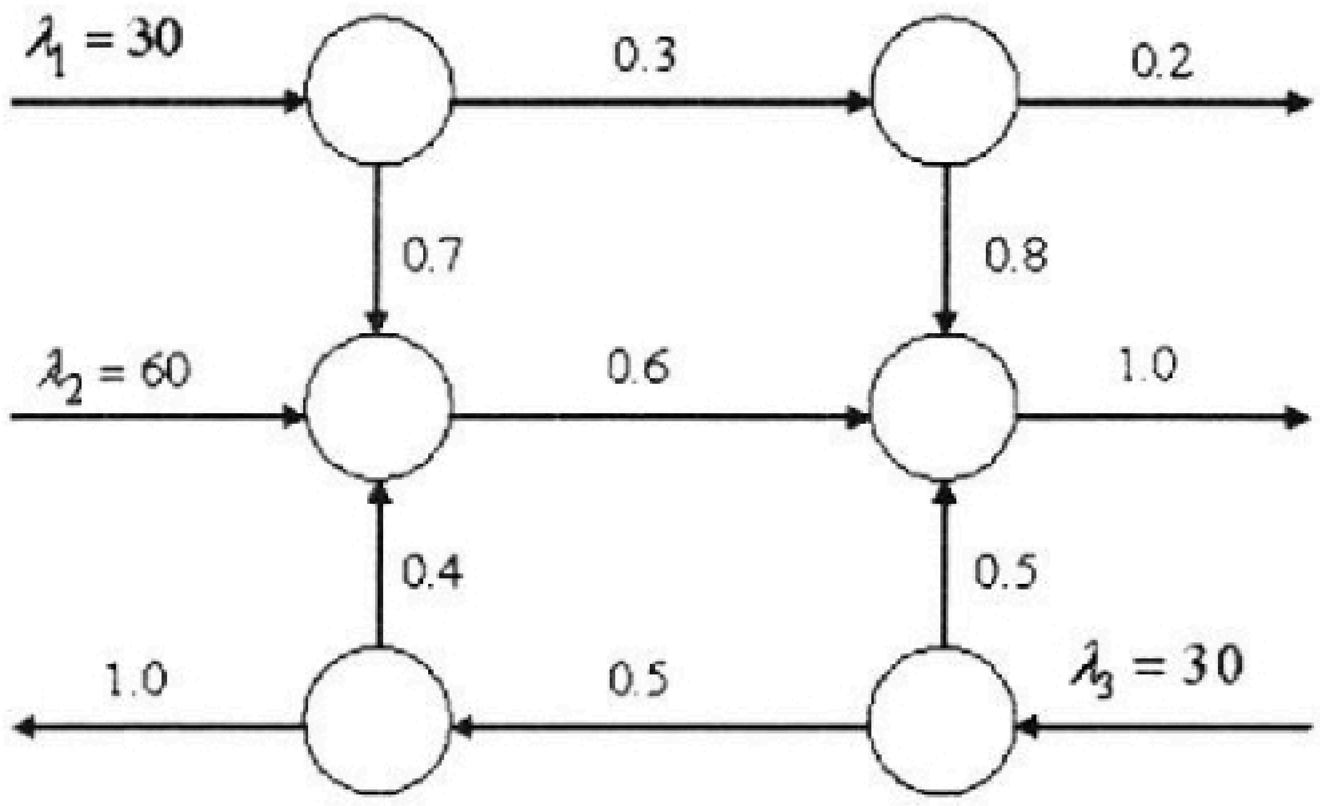
استخدم ذلك في المسألة التالية. بفرض أن الزبائن يصلون إلى أحد المتاجر بناء على عملية بواسون. وبفرض أن أول زبونين قد وصلا خلال أول ساعتين. أوجد احتمال:

١- أنهما قد وصلا أثناء العشرين دقيقة الأولى.

٢- على الأقل أحدهما قد وصل أثناء العشرين دقيقة الأولى.

(٧,١٢) يصل الزبائن إلى أحد محلات المدينة بناء على عملية بواسون $\{N_t; t \geq 0\}$ بمعدل $\lambda = 20$ كل ساعة. أوجد العدد المتوقع للمبيعات خلال ثمان ساعات في يوم عمل إذا كان احتمال أن الزبون يشتري شيئاً ما هو 0.3.

(٧,١٣) في شبكة الخطوط الموضحة بالشكل (٧,٦) لنفرض أن المدخلات عبارة عن عملية بواسون بالمعدلات الموضحة بالرسم واحتمالات اختيار المركبات للاتجاهات الموضحة مكتوبة على الأسهم التي توضح اتجاه السير. صف تدفق السير على كل فرع من فروع هذه الشبكة.



شكل (٧,٦): شبكة الخطوط لتمرين (٧,١٣).

(٧,١٤) يحتوي أحد أقسام مخزنٍ ما على ثلاثة أبواب. الوصول إلى كل من هذه الأبواب يُكون عملية بواسون بالمعدلات $\lambda_1 = 110$ ، $\lambda_2 = 90$ ، $\lambda_3 = 110$ من الزبائن في الساعة على الترتيب، و 30% من الزبائن ذكور. احتمال أن يشتري أحد الزبائن من الذكور شيئًا هو 0.8 أما من الإناث فالاحتمال هو 0.1 ، ومتوسط قيمة المشتريات هو 4.5 من الريالات.

١- ما هو متوسط قيمة المبيعات الكلية خلال 10 ساعات في اليوم؟

٢- ما هو احتمال أن أحد الزبائن من الإناث والتي ستشتري شيئًا ما ستصل خلال الخمسة عشر دقيقة الأولى؟ وما هو الزمن المتوقع لوصولها؟

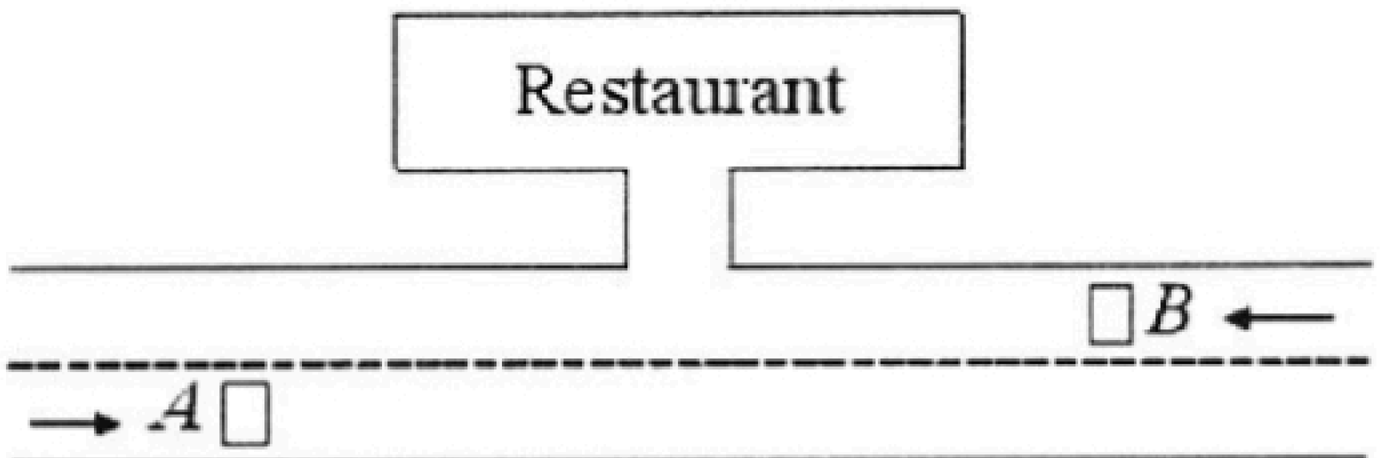
(٧,١٥) استخدم نظرية (٧,١١) لحساب المتوسط والتباين لعملية بواسون المركبة.

(٧,١٦) بفرض أن حركة المرور على أحد الطرق الموضحة بالشكل (٧,٧) هي كما يلي: عدد المركبات التي تعبر النقطة A يتبع توزيع بواسون بالمتوسط 60 ، 20% منها عربات نقل. وعدد المركبات التي تعبر النقطة B يتبع توزيع بواسون بالمتوسط 80 ، 30% منها عربات نقل. وعلى العموم يقف 10% من جميع المركبات عند المطعم وكل عربة نقل تحتوي على شخص واحد والسيارة الواحدة تحتوي على شخص واحد باحتمال 0.3 وشخصين باحتمال 0.3 ، وثلاثة باحتمال 0.2 ، وأربعة باحتمال 0.1 ، أو خمسة باحتمال 0.1 .

١- أوجد العدد المتوقع $E[Z]$ للأشخاص الذين يصلون إلى المطعم خلال ساعة

واحدة.

٢- احسب $E\left[\alpha^{Z}\right]$ لأي $\alpha \in [0,1]$.



شكل (٧,٧): صورة التمرين (٧,١٦).

(٧,١٧) يخضع جهاز ما لصدمات تحدث بناء على عملية بواسون $\{N_t; t \geq 0\}$ بالمعدل λ. يمكن أن يخفق الجهاز نتيجة لصدمة واحدة فقط، واحتمال أن صدمة ما ستسبب فشل النظام هو p ومستقل عن الأزمنة التي حدثت عندها الصدمات السابقة. ليكن K عدد الصدمات الكلي التي يتلقاها الجهاز قبل الإخفاق، و $T = T_K$ هو الزمن الذي حدث عنده الإخفاق. احسب ما يلي:

١- $E[T]$ و $\mathrm{Var}[T]$.

٢- $E[T \mid K]$.

٣- $E[T \mid K > 9]$.

الفصل الثامن

عمليات لا ولادة ولا وفاة

Non-Birth-and-Death Processes

(٨,١) مقدمة

ناقشنا في الفصل السادس بعض أنواع عمليات ماركوف والتي سميناها عمليات الولادة والوفاة. ففي هذا النوع من العمليات يحدث الانتقال من الحالة الحالية إلى حالة مجاورة: أي من الحالة $i \in S$ إلى الحالة $i+1 \in S$ $(i \geq 0)$ أو إلى الحالة $i-1 \in S$ $(i \geq 1)$. وسنناقش في هذا الفصل بعض عمليات ماركوف والتي لا تكون عمليات ولادة ولا وفاة. في هذا النوع من العمليات يتم الانتقال من حالة إلى حالة أخرى ليس من الضروري أن تكون مجاورة للحالة الحالية: بمعني أنه يمكن للعملية أن تنتقل من الحالة $i \in S$ إلى الحالة $i+r \in S$ $(i \geq 0, r \geq 1)$ أو إلى الحالة $i-k \in S$ $(i \geq k \geq 1)$. يستخدم هذا النوع من العمليات العشوائية لنمذجة أنظمة الطوابير.

(٨,٢) نموذج الولادة الجماعي

Bulk births model

ليكن $X(t)$ عدد أفراد مجتمع ما في منطقة معينة عند اللحظة الزمنية t. ولنفرض أن هذا العدد يتزايد أويتناقص بناء على القواعد التالية:

١- يحدث الانتقال من الحالة i إلى الحالة $i-1$ خلال الفترة الزمنية $(t,t+h)$

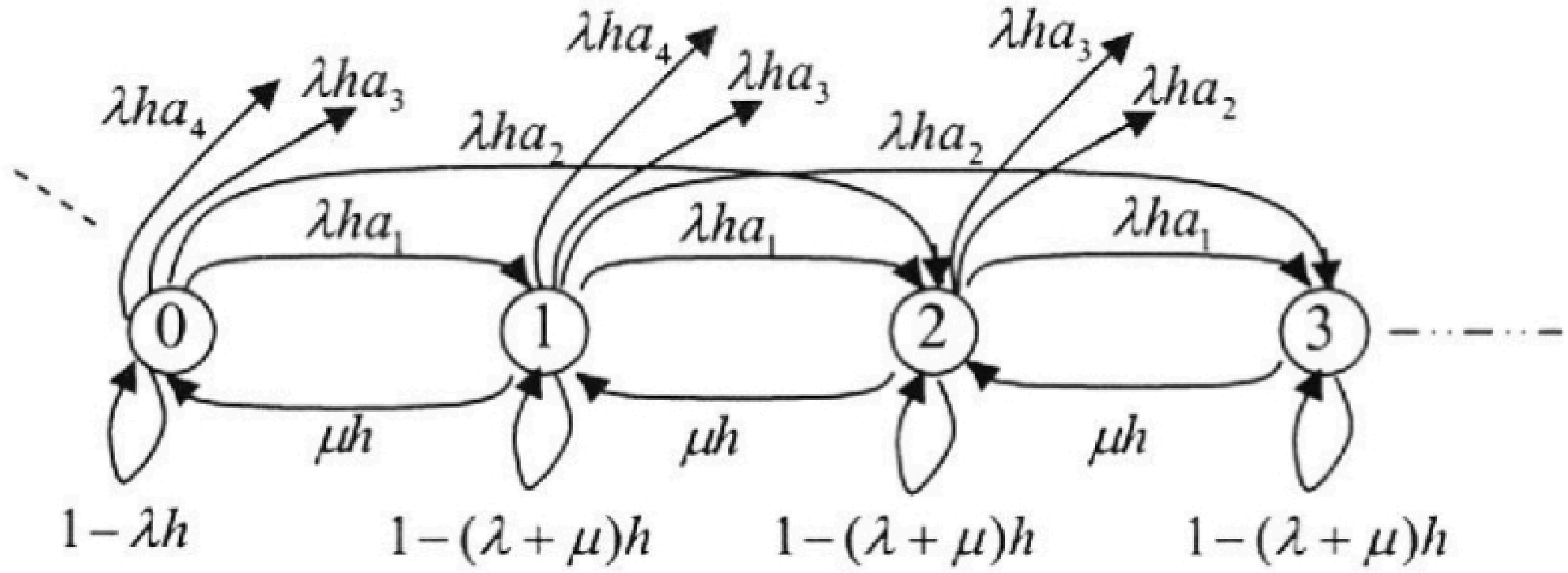
باحتمال $\mu h + o(h)$.

٢- يحدث الانتقال من الحالة i إلى الحالة $i+k$ ، $k=1,2,\cdots$ ، خلال الفترة الزمنية $(t,t+h)$ باحتمال $\lambda a_k h + o(h)$ ، حيث إن $\sum_{k\geq 1} a_k = 1$.

إذا كان $p_{ij}(t)$ يرمز إلى احتمال تغير عدد أفراد المجتمع من i عند اللحظة t إلى j عند اللحظة $t+h$ ، إذن وبحذف الحدود التي تحتوي $o(h)$ وذلك للتبسيط، فإن م.ح.ن. تأخذ الصورة التالية:

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1-\lambda h & \lambda h a_1 & \lambda h a_2 & \lambda h a_3 & \cdots \\ \mu h & 1-(\lambda+\mu)h & \lambda h a_1 & \lambda h a_2 & \cdots \\ 0 & \mu h & 1-(\lambda+\mu)h & \lambda h a_1 & \cdots \\ 0 & 0 & \mu h & 1-(\lambda+\mu)h & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \mu h & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \end{array}$$

نلاحظ مما سبق أن احتمال عدم تغير حجم المجتمع بالزيادة أو النقصان خلال الفترة الزمنية $(t,t+h)$ هو $1-(\lambda+\mu)h+o(h)$. يوضح الشكل (١,٨) الرسم البياني الملازم لهذه العملية العشوائية.



شكل (٨,١): التمثيل البياني لعملية الولادة الجماعية.

باستخدام نفس الرموز المستخدمة في عملية الولادة والوفاة المقدمة في الفصل السادس، نلاحظ

أن العلاقة:

$$\left(p_0(t+h), p_1(t+h), \cdots, p_n(t+h), \cdots\right) = \left(p_0(t), p_1(t), \cdots, p_n(t), \cdots\right)P$$

(٨,١)

تكافئ العلاقات التالية:

$$p_0(t+h) = (1-\lambda h)p_0(t) + \mu h\, p_1(t) ،$$

$$p_n(t+h) = \sum_{k=1}^{n} \lambda a_k\, p_{n-k}(t) + [1-(\lambda+\mu)h]p_n(t) + \mu h p_{n+1}(t), \quad n \geq k \geq 1$$

ومن ثَم يمكن الحصول على معادلات الفروق التفاضلية التالية لعملية الولادة الجماعية:

$$\begin{aligned} \frac{dp_0(t)}{dt} &= -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t), \\ \frac{dp_n(t)}{dt} &= \sum_{k=1}^{n} \lambda a_k\, p_{n-k}(t) - (\lambda+\mu)p_n(t) + \mu p_{n+1}(t), \quad n \geq k \geq 1. \end{aligned}$$

(٨,٢)

الحل المستقر (حل الحالة المستقر) Steady-state solution

لنفرض أن حل الحالة المستقر موجود، ومن ثَم نحصل على:

$$\begin{aligned} 0 &= -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t) \\ 0 &= \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k p_{n-k}(t) - (\lambda+\mu)p_n(t) + \mu p_{n+1}(t), \quad n \geq k \geq 1 \end{aligned} \tag{٨,٣}$$

لحل نظام المعادلات (٨,٣) سنستخدم طريقة الدالة المولدة للاحتمال. لأي $|z| \leq 1$، نفرض أن $A(z)$ ، و $P(z)$:

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n, \quad A(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

هما الدالتان المولدتان لاحتمال كل من $\{a_n\}$، $\{p_n\}$ ، على الترتيب. بضرب كل معادلة من معادلات النظام (٨,٣) في z^n وجمع الناتج نحصل على العلاقة التالية:

$$0 = -\lambda \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n - \mu \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n + \frac{\mu}{z} \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} p_{n-k} a_k z^n \tag{٨,٤}$$

نلاحظ أن $\sum_{k=1}^{n} p_{n-k}\, a_k$ هو دالة الكتلة الاحتمالية لمجموع حجم نظام الحالـــة المـــستقر وحجم الجماعة، وذلك لأنه عبارة عن التفاف convolution لمتغيرين عشوائيين. يمكن توضيح أن الدالة المولدة لاحتمال هذا المجموع تكون عبارة عن حاصل ضـــرب الـــدالتين المولـــدتين للاحتمال لطرفي المجموع، بمعنى أن:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} p_{n-k}a_k z^n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k \sum_{n=k}^{\infty} p_{n-k} z^{n-k} = A(z)\,P(z)$$

ومن ثم يمكن كتابة المعادلة (٨,٤) على الصورة التالية:

$$0 = -\lambda P(z) - \mu\left[P(z) - p_0\right] + \frac{\mu}{z}\left[P(z) - p_0\right] + \lambda P(z)\,A(z)$$

ومن ثَم:

$$P(z) = \frac{\mu(1-z)\,p_0}{\mu(1-z) - \lambda z\left[1 - A(z)\right]} \tag{٨,٥}$$

يمكن الحصول على p_0 باستخدام الشرط $P(1) = 1$ ، أي أن:

$$1 = \lim_{z\to 1} P(z) = \lim_{z\to 1}\left\{\frac{\mu(1-z)\,p_0}{\mu(1-z) - \lambda z\left[1 - A(z)\right]}\right\}$$

ولأن كلاً من البسط والمقام يؤول إلى الصفر، فإنه يمكن استخدام قاعدة لوبيتال l'Hopital's لنحصل على:

$$\begin{aligned}\lim_{z\to 1} P(z) &= \lim_{z\to 1}\left\{\frac{-\mu p_0}{-\mu - \lambda\, A(z) + \lambda\, z\, dA(z)/dz}\right\}\\ &= \frac{-\mu p_0}{-\mu + \lambda\,\bar{a}}\end{aligned}$$

حيث إن $\bar{a} = A'(1)$ ، ومن ثَم فإن:

$$p_0 = 1 - \frac{\lambda\,\bar{a}}{\mu}$$

وحتى تكون p_0 موجودة ومن ثم يمكن الوصول للحالة المستقرة فإنه يجب أن يتحقق الشرط $\rho = \frac{\lambda\bar{a}}{\mu} < 1$. والآن لأجل دالة معينة مولدة للاحتمال $A(z)$ فإنه يمكن استنتاج التوزيـــع المستقر $\{p_n\}$ وذلك بمقارنة معاملات مفكوك $P(z)$ والتي يمكن الحصول عليها من العلاقة

(٨,٥) ولتوضيح كيفية استخدام هذه الطريقة نقدم المثال التالي:

مثال (٨,١)

لنأخذ الدالة المولدة للاحتمال للتوزيع الهندسي:

$$a_k = (1-\alpha)\alpha^{k-1}, (0<\alpha<1), k = 1,2,\cdots \text{ ،}$$

$$A(z) = \frac{(1-\alpha)z}{1-\alpha z} \text{ ، } (|\alpha z| < 1)$$

ومن ثم فإنه وباستخدام العلاقة (٨,٥) نحصل على:

$$P(z) = \frac{\mu(1-\rho)(1-z)}{\mu(1-z) - \lambda z\left[1 - \frac{z(1-\alpha)}{1-\alpha z}\right]}$$

حيث إن $\rho = \frac{\lambda}{\mu(1-\alpha)}$. بإجراء بعض الحسابات الرياضية البسيطة نحصل على:

$$\begin{aligned} P(z) &= \frac{\mu(1-\rho)(1-z)}{\mu(1-z) - \frac{\lambda z(1-\alpha)}{1-\alpha z}} \\ &= \frac{\mu(1-\rho)(1-\alpha z)}{\mu(1-\alpha z) - \lambda z} \\ &= \frac{\mu(1-\rho)(1-\alpha z)}{1-[\alpha+(1-\alpha)\rho]z} \end{aligned}$$

والتي يمكن كتابتها في الصورة التالية:

$$P(z) = (1-\rho)\left\{\frac{1}{1-[\alpha+(1-\alpha)\rho]z} - \frac{\alpha z}{1-[\alpha+(1-\alpha)\rho]z}\right\}$$

وبالاستفادة من مجموع المتسلسلة الهندسية نحصل على:

$$P(z) = (1-\rho)\left\{\sum_{n=0}^{\infty}[\alpha+(1-\alpha)\rho]^n z^n - \sum_{n=0}^{\infty}\alpha[\alpha+(1-\alpha)\rho]^n z^{n+1}\right\}$$

ومن ثَم فإن:

$$\begin{aligned} p_n &= (1-\rho)\left\{[\alpha+(1-\alpha)\rho]^n - \alpha[\alpha+(1-\alpha)\rho]^{n-1}\right\} \\ &= (1-\alpha)\rho(1-\rho)\,[\alpha+(1-\alpha)\rho]^{n-1},\ n \ge 1. \end{aligned}$$

الحجم المتوقع للمجتمع. الحجم المتوقع للمجتمع يعطى بالعلاقة التالية:

$$E[X] = \lim_{z \to 1} \frac{dP(z)}{dz} \qquad (٨,٦)$$

بحساب مشتقة $P(z)$ بالنسبة لـ z ثم بالتعويض عن z نحصل على النتيجة $\frac{0}{0}$، كما حدث عندما حسبنا $P(1)$. ومن ثَم وبالرغم من إمكانية تطبيق قاعدة ليبوتال (انظر تمرين (٨,٨)) إلا أننا نقترح طريقة أخرى كما هو موضح أدناه.

حيث إن متسلسلة القوى تتقارب على كل فترة الوحدة إذن وبناء على نظرية أبل Abel's theorem فإن كلاً من الدالة $P(z)$ ومشتقتها $P'(z)$ تكون متصلة عند $z = 1$. يمكن حذف عدم التحديد في $P(z)$ بفك البسط كمتسلسلة قوى حول $z = 1$ ثم نحذف المعامل $(1 - z)$ من بسط ومقام الدالة $P(z)$.

باعتبار مفكوك تايلورTaylor للدالة $f(z) = 1 - A(z)$ حول $z = 1$ نحصل على:

$$f(z) = f(1) + (z-1) f'(1) + \frac{(z-1)^2}{2} f''(1) + \text{higher powers of } (z-1).$$

والآن $f(1) = 0$، $f'(1) = -A'(1) = -\bar{a}$، $f''(1) = -A''(1) = -\sigma^2 + \bar{a}^2 - \bar{a}$،
حيث إن $\bar{a}$، σ هما المتوسط الحسابي والانحراف المعياري للتوزيع $\{a_k\}$. ومن ثَم فإن:

$$P(z) = \frac{\mu(1-z)(1-\rho)}{\mu(1-z) - \lambda z\left[(1-z) f'(1) + \frac{(z-1)^2}{2} f''(1) + \cdots\right]}$$

أي أن:

$$P(z) = \frac{\mu(1-\rho)}{\mu + \lambda z f'(1) + \frac{\lambda z (z-1)}{2} f''(1) + \cdots}$$

ومن ثم نحصل على:

$$P(1) = \frac{\mu(1-\rho)}{\mu - \lambda \bar{a}} = 1$$

ونحصل على:

$$P'(1) = \frac{\mu(1-\rho)}{(\mu - \lambda \bar{a})^2}\left[-\lambda f'(1) - \tfrac{\lambda}{2} f''(1)\right]$$

$$= \frac{1}{\mu - \lambda\overline{a}}\left[\lambda\, A'(1) + \tfrac{\lambda}{2}\, A''(1)\right]$$

$$= \frac{1}{\mu - \lambda\overline{a}}\left[\lambda\, \overline{a} + \tfrac{\lambda}{2}\left(\sigma^2 + \overline{a}^2 - \overline{a}\right)\right]$$

$$= \frac{\lambda\left(\sigma^2 + \overline{a}^2 - \overline{a}\right)}{2\left(\mu - \lambda\overline{a}\right)}$$

ومن ثَم فإن:

$$E[X] = \frac{\lambda\left(\sigma^2 + \overline{a}^2 - \overline{a}\right)}{2\left(\mu - \lambda\overline{a}\right)}$$

وبنفس الطريقة يمكن الحصول على $P''(1)$ ومن ثم نحصل على تباين حجم المجتمع في الحالة المستقرة (انظر تمرين (٨,٨)).

(٨,٣) نموذج الوفاة الجماعي
Bulk deaths model

كما قدمنا في البند السابق، $X(t)$ يمثل عدد أفراد مجتمع في منطقة معينة عند اللحظة الزمنية t، وبمعلومية أي عدد صحيح $K > 1$، فإن $X(t)$ يمكن أن يتزايد أويتناقص بناء على القواعد التالية:

١- يحدث الانتقال من الحالة i إلى الحالة $i+1$ خلال الفترة الزمنية $(t, t+h)$ باحتمال $\lambda h + o(h)$.

٢- إذا كان $i < K$، فإن الانتقال يحدث من الحالة i إلى الحالة $i-k$، $(k = 1,2,\cdots,i)$، خلال الفترة الزمنية $(t, t+h)$ باحتمال $\mu h + o(h)$.

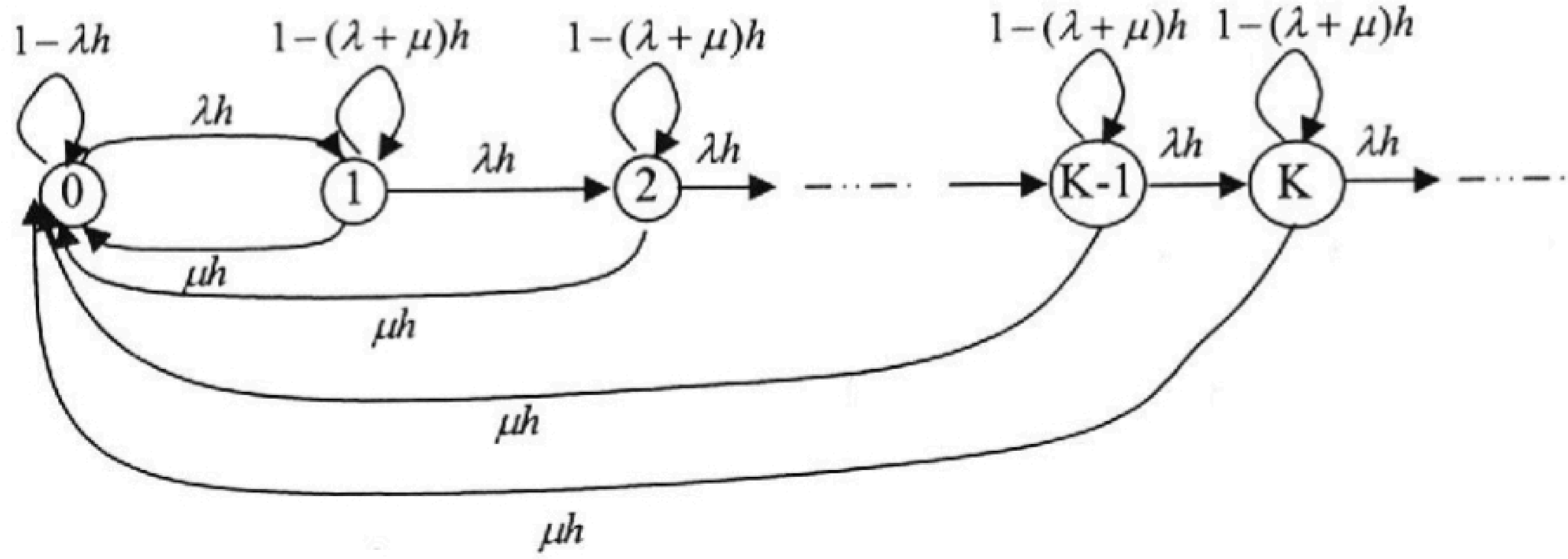
٣- إذا كان $i > K$، فإن الانتقال يحدث من الحالة i إلى الحالة $i-K$، $(k = 1,2,\cdots,i)$، خلال الفترة الزمنية $(t, t+h)$ باحتمال $\mu h + o(h)$.

إذا كان $p_{ij}(t)$ يرمز إلى احتمال تغير عدد أفراد المجتمع من i عند اللحظة t إلى j عند اللحظة $t+h$، إذن وبحذف الحدود التي تحتوي $o(h)$ وذلك للتبسيط، فإن م.ح.ن. تأخذ

الصورة التالية:

$$P=\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & K-1 & K & K+1 & K+2 & \cdots \end{array} \\
\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ K-1 \\ K \\ K+1 \\ \vdots \end{array} & \begin{pmatrix}
1-\lambda h & \lambda h & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
\mu h & 1-(\lambda+\mu)h & \lambda h & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
\mu h & 0 & 1-(\lambda+\mu)h & \lambda h & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\
\mu h & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-(\lambda+\mu)h & \lambda h & 0 & 0 & \cdots \\
\mu h & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1-(\lambda+\mu)h & \lambda h & 0 & \cdots \\
0 & \mu h & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1-(\lambda+\mu)h & \lambda h & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{pmatrix}
\end{array}$$

نلاحظ من (١)، و(٢) الموضحين آنفاً أن احتمال عدم تغير حجم المجتمع بالزيادة أو النقصان خلال الفترة الزمنية $(t,t+h)$ هو $1-(\lambda+\mu)h+o(h)$. يوضح الشكل (٨,٢) الرسم البياني الملازم لهذه العملية العشوائية.



شكل (٨,٢): التمثيل البياني لعملية الوفاة الجماعية.

باتباع نفس الإجراء المتبع في البند السابق، يمكن الحصول على المعادلات التي تكافئ المعادلات (٨,١) في الصورة التالية:

$$\begin{aligned}
p_0(t+h) &= (1-\lambda h)p_0(t)+\mu h\sum_{i=1}^{K}p_i(t) \\
p_n(t+h) &= \lambda h\,p_{n-1}(t)+[1-(\lambda+\mu)h]p_n(t)+\mu h\,p_{n+K}(t),\ \ n\geq 1
\end{aligned}$$

وباستخدام هذه المعادلات يمكن الحصول على معادلات الفروق التفاضلية التالية لعملية الوفاة الجماعية:

$$\begin{aligned} \frac{dp_0(t)}{dt} &= -\lambda p_0(t) + \mu \sum_{i=1}^{K} p_i(t) \\ \frac{dp_n(t)}{dt} &= \lambda p_{n-1}(t) - (\lambda+\mu) p_n(t) + \mu p_{n+K}(t), \quad n \ge 1. \end{aligned} \tag{٨,٧}$$

الحل المستقر (حل الحالة المستقر) Steady-state solution

لنفرض أن حل الحالة المستقر موجود، ومن ثَم نحصل على:

$$\begin{aligned} 0 &= -\lambda p_0 + \mu p_1 + \cdots + \mu p_{K-1} + \mu p_K , \\ 0 &= \mu p_{n+K} - (\lambda+\mu) p_n + \lambda p_{n-1}, \qquad n \ge 1. \end{aligned} \tag{٨,٨}$$

لحل نظام المعادلات (٨,٨) سنستخدم طريقة المؤثرات الموضحة فيما يلي:

حيث إن $Dp_n = p_{n+1}, n \ge 0$ ، فإن $D^m p_n = p_{m+n} \ \forall n, m$ ، إذن يمكن كتابة المعادلة الثانية في النظام (٨,٨) في الشكل التالي:

$$\left(\mu D^{K+1} - (\lambda+\mu) D + \lambda\right) p_n = 0, \qquad n \ge 0$$

ومن ثم فإن المعادلة المميزة تأخذ الصورة التالية:

$$\mu D^{K+1} - (\lambda+\mu) D + \lambda = 0 \tag{٨,٩}$$

وبحل المعادلة المميزة نحصل على جذورها، ولتكن $\left(r_n, \cdots, r_{K+1}\right)$، ومن ثَم فإن:

$$p_n = \sum_{i=1}^{K+1} C_i \, r_i^n , \, n \ge 0$$

ولأن $p_n = \sum_{i=1}^{K+1} C_i \, r_i^n , \, n \ge 0$ إذن يجب أن يكون جميع r_i أقل من الواحد أو $C_i = 0$ لكل r_i ليس أقل من الواحد. يمكن التحقق من أنه في الحقيقة يوجد جذر واحد وواحد فقط لمثل هذا النوع من المعادلات المميزة، (إلا أن البرهان خارج هدف هذا الكتاب)، وليكن r_0، يقع في الفترة $(0,1)$. ومن ثَم فإن:

$$p_n = C \, r_0^n , \, n \ge 0$$

وباستخدام الشرط $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$ نحصل على:

$$C = p_0 = 1 - r_0$$

ومن ثَم فإن:

$$p_n = (1-r_0)\ r_0^n\ ,\ n \geq 0.$$

مثال (٨,٢)

يمكن كتابة المعادلة المميزة (٨,٩) في الصورة التالية:

$$D^{K+1} - (1-\rho)D + \rho = 0$$

حيث إن $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$.

بأخذ $k = 1$ نحصل على:

$$D^2 - (1-\rho)D + \rho = 0$$

ومن ثَم فإن الجذور هي:

$$D_1 = \frac{(1+\rho)+\sqrt{(1+\rho)^2 - 4\rho}}{2} = \frac{1+\rho+1-\rho}{2} = 1,$$

$$D_2 = \frac{(1+\rho)-\sqrt{(1+\rho)^2 - 4\rho}}{2} = \frac{1+\rho-1+\rho}{2} = \rho$$

من الواضح أن $D_1 \notin (0,1)$ بينما $D_2 \in (0,1)$ ، ومن ثَم فإن $C_1 = 0$ ، $C_2 = 1-\rho$ وأن:

$$p_n = (1-\rho)\rho^n\ ,\ n \geq 0$$

كما أنه عندما $k \geq 2$ ، يمكن الحصول على الجذور المطلوبة أيضاً باستخدام أحد برامج الحاسوب المعروفة.

الحجم المتوقع للمجتمع. الحجم المتوقع للمجتمع يُعطى بالعلاقة التالية:

$$E[X] = \sum_{n=0}^{\infty} np_n \qquad (٨,١٠)$$

باستخدام علاقات p_n نحصل على:

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{n=0}^{\infty} n(1-r_0)r_0^n \\ &= (1-r_0)\sum_{n=0}^{\infty} n\, r_0^n \end{aligned}$$

يمكن حساب $\sum_{n=0}^{\infty} n r_0^n$ كالآتي:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} n r_0^n &= r_0 + 2r_0^2 + 3r_0^3 + \cdots \\ &= r_0\left(1 + 2r_0 + 3r_0^2 + \cdots\right) \\ &= r_0 \sum_{n=1}^{\infty} n r_0^{n-1}\end{aligned}$$

ولكن وببساطة $\sum_{n=1}^{\infty} n r_0^{n-1}$ عبارة عن مشتقة $\sum_{n=0}^{\infty} r_0^n$ بالنسبة لـ r_0، وذلك لأنه يمكن تبديل عمليتي الجمع والاشتقاق. وبما أن $r_0 < 1$ فإن:

$$\sum_{n=0}^{\infty} r_0^n = \frac{1}{1-r_0}$$

ومن ثم فإن:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n r_0^{n-1} = \frac{1}{(1-r_0)^2}$$

ومن ثَم فإن العدد المتوقع لحجم المجتمع في الحالة المستقرة هو:

$$E[X] = \frac{(1-r_0)r_0}{(1-r_0)^2}$$

أو ببساطة:

$$E[X] = \frac{r_0}{1-r_0}$$

وبنفس الطريقة يمكن الحصول على $\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)p_n$ ومن ثم نحصل على تباين حجم المجتمع في الحالة المستقرة (انظر تمرين (٨,٩)).

(٨,٤) تمارين

(٨,١) بالعودة إلى المثال (٨,١) ولكن بفرض أن $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$، $a_k = 0, k > 2$ ومن ثم فإن الدالة المولدة للاحتمال تأخذ الصورة $A(z) = \frac{1}{2} z(z+1)$، $\rho = \frac{2}{3}\frac{\lambda}{\mu}$ استنتج p_n بالتفصيل.

(٨,٢) حل التمرين السابق عندما:

١- يكون التوزيع هو توزيع برنوللي بـــ $a_1 = p$ ، $a_2 = 1 - p$ ، $0 < p < 1$.

٢- يكون التوزيع هو توزيع متعدد الحدود multinomial .

(٨,٣) اعتبر حالة ثبات حجم الجماعة وافرض أن حجم كل جماعة يساوي تمامًا r ، بمعنى أن $a_r = 1$ ، $a_k = 0, k \neq r$ ، ومن ثَم فإن $A(z) = z^r$ ، استنتج الدالة المولدة للاحتمال $P(z)$ في هذه الحالة.

(٨,٤) استخدم قاعدة لوبيتال والعلاقة (٨,٦) لحساب القيمة المتوقعة لحجم المجتمع مباشرة.

(٨,٥) بفرض أن $A(z)$ تأخذ الصورة التالية:

$$A(z) = \frac{\lambda_1 z + \lambda_2 z^2}{\mu}$$

١- استنتج $P(z)$.

٢- وضح أن متوسط حجم المجتمع يعطى بالعلاقة التالية:

$$E(N) = \frac{\mu(1-\rho)(\lambda_1 + 3\lambda_2)}{(\mu - \lambda_1 - 2\lambda_2)^2}$$

حيث إن $\rho = \frac{1}{2}(\lambda_1 + 2\lambda_2)$.

(٨,٦) أوجد تباين حجم المجتمع لنوذج الولادة الجماعي.

(٨,٧) بالعودة إلى نموذج الوفاة الجماعي ولكن بفرض أن الانتقال من الحالة i إلى الحالة $i - K$ يحدث فقط إذا كان $i > K$ ، بمعنى أنه إذا كان $i < K$ فإنه لا يوجد انتقال من الحالة i إلى الحالة $i - k$ ، $k = 1, 2, \cdots, i$ ، خلال الفترة $(t, t+h)$.

١- وضح أن معادلات الفروق للحالة المستقرة هي:

$$\begin{aligned}
0 &= -\lambda p_0 + \mu p_K \\
0 &= \mu p_{n+K} - \lambda p_n + \lambda p_{n-1}, \quad 1 \le n < K \\
0 &= \mu p_{n+K} - (\lambda + \mu) p_n + \lambda p_{n-1}, \quad n \ge K
\end{aligned}$$

٢- استخدم المؤثرات لإثبات أن p_n تعطى بالعلاقة التالية:

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{p_0(1-r_0^{n+1})}{(1-r_0)}, & 1 \le n < K, \\ \dfrac{p_0\,\lambda}{\mu} r_0^{n-K}, & n \ge K, \end{cases}$$

حيث إن $p_0 = \frac{1-r_0}{K}$.

(٨,٨) استخدم طريقة الدالة المولدة للاحتمال في نموذج الوفاة الجماعي لإثبات أن:

$$P(z) = \frac{(1-z^K)\sum_{n=0}^{K-1} p_n z^n}{\rho z^{K+1} - (\rho+1) z^K + 1},$$

حيث $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$.

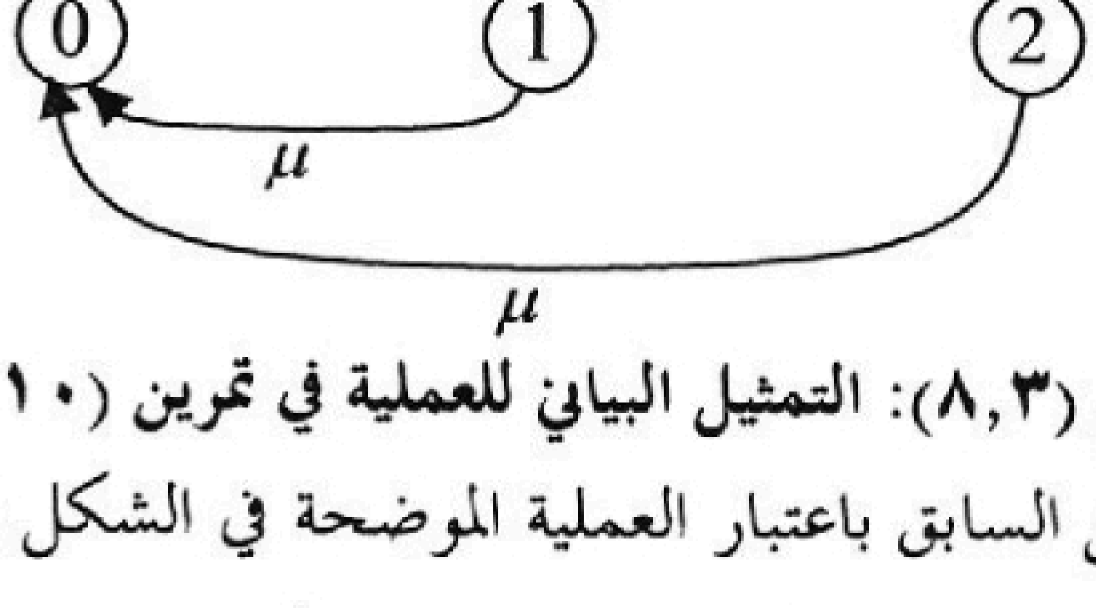
(٨,٩) أوجد تباين حجم المجتمع لنموذج الوفاة الجماعي.

(٨,١٠) اعتبر عملية لاولادة ولاوفاة الموضحة بالشكل (٨,٣)، والتي توضح الرموز على فروعها معدلات الولادة والوفاة، مع ملاحظة أن الأعداد الموضحة في العقد تعطي حجم المجتمع.

١- أوجد p_n عندما $n = 0,1,2$ وذلك بعد كتابة معادلات الموازنة (انظر تمرين (٦,٥)).

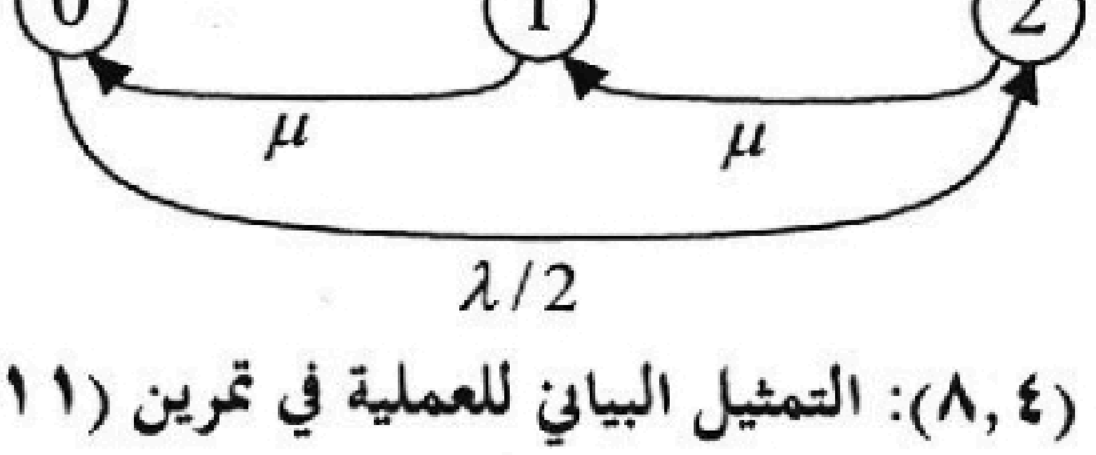
٢- أوجد متوسط حجم المجتمع.

٣- أوجد المطلوب في (١) ، (٢) وذلك عندما $\lambda = \mu$.



شكل (٨,٣): التمثيل البياني للعملية في تمرين (٨,١٠).

(٨,١١) أعد حل التمرين السابق باعتبار العملية الموضحة في الشكل (٨,٤).



شكل (٨,٤): التمثيل البياني للعملية في تمرين (٨,١١).

الباب الثالث

تطبيقات

- صفوف انتظار ماركوف
- نماذج الموثوقية
- عمليات التفرع

الفصل التاسع

صفوف انتظار ماركوف

Markovian Queues

(٩,١) مقدمة

يتطلب العيش في هذا العالم المزدحم الانتظار طول الوقت، الذهاب إلى المحلات التجارية، نتقدم ببطء بسيارتنا في الطرق السريعة، ننتظر في صفوف عند موظفي المحاسبة. نظرية صفوف الإنتظار تكون عبارة عن فرع من فروع الاحتمالات التطبيقية والتي تبحث في فهم مثل هذه الظاهرة. بدأت نظرية صفوف الانتظار منذ أكثر من 80 عاماً بدراسة أزمنة الانتظار في أنظمة الهواتف، والآن يوجد العديد من التطبيقات في المجالات المختلفة والتي يستخدم فيها نظرية صفوف الانتظار، فعلى سبيل المثال في شبكات الحاسوب، والصناعة، وإدارة الحركة التجارية. لاحظ فقط أن نظرية صفوف الانتظار تتقاسم نفس البناء الرياضي الأساسي مع بعض المسائل الأخرى مثل المخزون inventory، وسدود تخزين المياه dams ، ومخاطر التأمين insurance risks. سيقود فهم نمذجة نظرية صفوف الانتظار إلى فهم هذه المسائل.

(٩,٢) أنظمة صفوف الانتظار

Queueing system

عمومًا يكون نظام صف الانتظار عبارة عن تسهيل ما يصل إليه الزبائن customers ثم يقضون عنده فترة زمنية معينة قبل المغادرة. يصل الزبائن إلى النظام لأنهم يحتاجون إلى الحصول على خدمة معينة تقدم لهم من خدمة الزبائن.

سنشير إلى زمن الوصول الداخلي رقم n بالرمز t_n، لأي $n \geq 1$، وهو أمد الانتظار بين زمن وصول الزبون رقم n وزمن وصول الزبون رقم $n+1$. سنفرض أن جميع الأزمنة t_n تكون مستقلة مثنى مثنى ومتطابقة؛ أي لها نفس التوزيع. تسمى العملية العشوائية $\{t_n; n = 1,2,\cdots\}$ بعملية الوصول arrival process ويكون $\lambda = \frac{1}{E[t_1]}$ معدل الوصول arrival rate.

لنفرض أن الزبون رقم n يحتاج إلى الوقت s_n، $n \geq 1$، للحصول على الخدمة المطلوبة، وأن جميع هذه الأزمنة تكون مستقلة ومتطابقة، أي لها نفس التوزيع. تسمى العملية العشوائية $\{s_n; n = 1,2,\cdots\}$ بعملية الخدمة service process .بمعدل الخدمة $\mu = \frac{1}{E[s_1]}$. كما نفرض أيضاً أن زمن الخدمة مستقل عن زمن الوصول الداخلي.

عمليتا الوصول والخدمة لا تكونان كافيتين لوصف نظام صفوف انتظار بشكل كامل. ومن ثَم نحتاج إلى معلومات إضافية لدراسة سلوك نظام صفوف الانتظار. في هذا الفصل سنفرض أنه يوجد خط انتظار واحد فقط. كما سنفرض أن نظام الخدمة يكون عبارة عن الواصل أولاً يخدم أولاً first come first served، .بمعنى أنه إذا وصل أحد الزبائن وكان جميع القائمين بالخدمة مشغولين ثم قرر الانتظار، فإنه سينتظر بعد آخر زبون في خط الانتظار.

مجموعة رموز كندل Kendall notation

اقترح كندل في عام ١٩٥١م نظاماً من الرموز لوصف معالم نظام صفوف انتظار، ولها الصيغة المختصرة A/B/*k* ، حيث إن A يصف نوع توزيع أزمنة الوصول الداخلية، B نوع توزيع زمن الخدمة، أما k فيرمز إلى عدد الأفراد المقدم لهم الخدمة.

١- إذا لم توضع أي فرضية حول التوزيعين A، وB فسيفترض أنهما عامَّان ونستخدم بدلاً منهما الرمز العام G.

٢- إذا كان أي من أزمنة الانتظار الداخلية أو أزمنة الخدمة تتبع توزيعاً أسياً، فسيتم استبدال A أو B بالرمز M (Markovian).

٣- إذا كان أي من أزمنة الانتظار الداخلية أو أزمنة الخدمة تتبع توزيع إيرلنج-k،

سنتستخدم الرمز E_k بدلاً من A أو B.

بعض أنظمة الخدمة يكون لها سعة خدمة محدودة، ومن ثَم يمكن أن تستوعب فقط حتى عدد N من الزبائن، بما فيهم هؤلاء الزبائن الذين تقدم لهم الخدمة. إذا وصل أحد الزبائن ووجد عدد N من الزبائن موجودون في النظام فإنه على الفور سيغادر النظام. في هذه الحالة توسع الصيغة المختصرة للنظام لتصبح A/B/*k*/*N*.

مقاييس الأداء Performance measures

بعد وصف نظام صفوف الانتظار، سنتعرف الآن على الكميات التي نرغب في حسابها. عمومًا نشير إلى التجمع التالي بمقاييس أداء النظام:

١- L_q ، the long-term time-average لسلسلة ماركوف متصلة الزمن $\{N_q(t), t \geq 0\}$ ، حيث إن $N_q(t)$ يرمز إلى عدد الزبائن المنتظرين في صف انتظار عند اللحظة t.

٢- L، the long-term time-average لسلسلة ماركوف متصلة الزمن $\{N(t), t \geq 0\}$ ، حيث إن $N(t)$ يرمز إلى عدد الزبائن المنتظرين في النظام عند اللحظة t ، أي عدد الزبائن المنتظرين في صف انتظار والزبائن الذين تقدم لهم الخدمة.

٣- W_q ، the long-term customer-average لسلسلة ماركوف منفصلة الزمن $\{q_n; n = 1,2,\cdots\}$ ، حيث إن q_n يرمز إلى زمن انتظار الزبون رقم n في صف انتظار قبل بدء استلامه الخدمة.

٤- $W = W_q + E[s_1]$، the long-term customer-average لسلسلة ماركوف منفصلة الزمن $\{w_n; n = 1,2,\cdots\}$ ، حيث إن $w_n = q_n + s_n$ يرمز إلى زمن انتظار الزبون رقم n في النظام، أي مجموع زمن الانتظار في صف انتظار وزمن الحصول على الخدمة.

صيغة لتل Little's formula

لنفرض أن نظاماً متوازناً يبقى فيه الزبائن الذين يصلون ثم يغادرون. ولنفرض أن λ يرمز إلى معدل الوصول، W متوسط زمن الانتظار في النظام، L متوسط عدد الزبائن في النظام. تعتبر صيغة لتل من النتائج المفيدة جدًا في أنظمة صفوف الانتظار، وهذ الصيغة تعطي العلاقة بين L، و W في الشكل التالي:

$$L = \lambda W \tag{٩,١}$$

يمكن فهم هذه العلاقة على النحو التالي: لنفرض أن جميع الزبائن سيدفعون ريالاً واحداً لكل وحدة زمنية ما داموا في النظام. يمكن استحقاق هذا المال بطريقتين، الطريقة الأولى هي جعل جميع الزبائن يدفعون مع الزمن، ومن ثَم فإن متوسط قيمة الاستحقاق للنظام يساوي L من الريالات في وحدة الزمن. وفي الطريقة الثانية يطلب من كل زبون أن يدفع ريالاً واحداً لكل وحدة زمنية قضاها في النظام عندما يترك النظام. في النظام المتوازن، متوسط عدد الزبائن الذين يتركون النظام في وحدة الزمن يساوي متوسط عدد الزبائن الذين يدخلون النظام. ومن ثَم فإن متوسط استحقاقات النظام سيكون λW لكل وحدة زمنية. ومن الواضح أن استحقاقات النظام تكون واحدة في كلا الحالتين.

تعتبر صيغة لتل صيغة عامة، وتبقى هذه الصيغة صحيحة عندما تطبق على أنظمة معرفة بشكل مناسب (أنظمة جزئية). تطبيق قانون لتل على نظام مكون من صف انتظار وخادم ينتج العلاقة (٩,١). وتطبيق قانون لتل على نظام مكون من صف انتظار (باستبعاد الخادم) ينتج العلاقة بين متوسط طول صف انتظار L_q ومتوسط زمن الانتظار W_q، أي أن:

$$L_q = \lambda W_q$$

وأخيرًا بتطبيق قانون لتل على نظام صفوف انتظار بخادم واحد (منفرد)، نحصل على:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

حيث ρ يرمز إلى متوسط عدد الزبائن عند الخادم (وهو نفس جزء الزمن الذي يمثل فترة

عمل الخادم) ، و $\frac{1}{\mu}$ هو متوسط زمن الخدمة.

سنقوم في الجزء المتبقي من هذا الفصل بدراسة أنظمة صفوف انتظار، والتي يكـــون فيها تدفق الوصول يتبع توزيع بواسون وجميع أزمنة الخدمة تتبع التوزيع الأسي، والتي سنسميها بصفوف انتظار ماركوف Markovian queues. وكما سنرى، بعض هذه الأنظمة تعتمد على عمليات الولادة والوفاة بينما تعتمد الأنظمة الأخرى على عمليات لاولادة ولا وفاة. أنظمـــة صفوف الانتظار التي لا تكون صفوف انتظار ماركوف تقع خارج نطاق هذا الكتاب.

(٩,٣) نماذج صفوف انتظار ولادة ووفاة

Birth-and death queueing models

النماذج الخاصة التي سنعرضها في هذا البند تكون عبارة عن أنواع خاصة من نمـــاذج ماركوف والتي تسمى بعمليات الولادة والوفاة. وكما أوضحنا سابقًا، نماذج ماركوف تكون ضرورية للأنظمة التي يتحقق فيها أن سلوكها في المستقبل يعتمد فقط على سلوكها في الحاضر ولا يعتمد على سلوكها في الماضي. كما أن نماذج الولادة والوفاة يتمتع بخاصية إضافية، وهي أن التغير الوحيد الممكن في حالة النظام عند أي لحظة يكون ± 1. نُذكّر فيما يلي بمعـــادلات الفروق-التفاضلية التي قدمناها في الفصل السادس:

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda_0\, p_0(t) + \mu_1\, p_1(t)$$

(٩,٢)

$$\frac{dp_n(t)}{dt} = -\lambda_{n-1}\, p_{n-1}(t) - (\lambda_n + \mu_n)\, p_n(t) + \mu_{n+1}\, p_{n+1}(t),$$

$$n = 1,2,\cdots$$

كما ذكرنا في الفصلين السادس والثامن، أنه من الصعب جدًا الحصول على حلـــول معادلات الفروق – التفاضلية في الحالة العامة. توجد بعض الحالات المنفصلة والتي يمكن فيها الحصول على حلول هذه المعادلات، والتي لن نذكرها هنا، ولكن سنبحث عن حلول الحالات المستقرة. ولحسن الحظ، في العديد من التطبيقات، تلعب الحالة المستقرة دورًا رئيسياً. وحيث

أن في الحل المستقر $p_n(t)$ لاتعتمد على الزمن، ومن ثَم فإن $\frac{dp_n(t)}{dt} = 0$ ، ومن ثم فـــإن العلاقات (٩,٢) تأخذ الصورة التالية:

$$0 = -\lambda_0 \, p_0 + \mu_1 \, p_1$$

(٩,٣)

$$0 = -\lambda_{n-1} \, p_{n-1} - (\lambda_n + \mu_n) p_n + \mu_{n+1} \, p_{n+1} \, , \; n = 1,2,\cdots$$

والتي يمكن كتابتها في الصورة التالية:

$$p_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0$$

(٩,٤)

$$p_{n+1} = \frac{\lambda_n + \mu_n}{\mu_{n+1}} p_n - \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_{n+1}} p_{n-1} \, , \; n = 1,2,\cdots$$

وباستخدام الاستنتاج الرياضي (انظر تمرين (٦,٦))، يمكن الحصول على حل نظام المعادلات (٩,٤) في الصورة التالية:

$$p_n = \frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\cdots\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1}\cdots\mu_1} p_0, \; n = 1,2,\cdots$$

والذي يمكن كتابته في الصورة التالية:

$$p_n = p_0 \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}, \; n = 1,2,\cdots \tag{٩,٥}$$

وحيث إن $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$ ، أي أن:

$$p_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} \right] = 1 \tag{٩,٦}$$

الشرط الضروري والكافي لوجود حل الحالة المستقر هو تقارب المتسلسلة غير المنتهية التالية:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} \tag{٩,٧}$$

من الضروري أن نُذكِّر بكيفية استخدام عملية الولادة والوفاة لوصف أنظمة صفوف الانتظار.

كمثال، لنفرض أن مكتب طبيب جهز غرفة انتظار وعملية الخدمة تتكون من غرفة فحص الطبيب، وكل لحظة يصل عندها أحد المرضى إلى غرفة الانتظار قادمًا من خارج المكتب، تعتبر لحظة وصول إلى نظام صفوف انتظار، ومن ناحية أخرى يمكن اعتبار هذا الوصول مولد لعنصر جديد في مجتمع يتكون من جميع المرضى الموجودين في المكتب. وبقراءة مماثلة، عندما يترك أحد المرضى المكتب بعد فحصه، فإنه يعتبر حالة مغادرة من نظام صفوف الانتظار، ومن وجهة نظر عمليات الولادة والوفاة، فإن هذه المغادرة تعتبر وفاة أحد عناصر المجتمع.

لدينا حرية كبيرة في إنشاء عدد كبير من أنظمة صفوف الانتظار والتي تعتمد على كيفية اختيار معاملات الولادة λ_k ومعاملات الوفاة μ_k، كما سنرى فيما يلي باختصار. والآن أصبحنا على استعداد لتقديم بعض من نماذج صفوف الانتظار المتعددة والتي تنتج كحالات خاصة من عمليات الولادة والوفاة.

– نموذج صف انتظار M/M/1

يعتبر هذا النموذج من أبسط أنواع نماذج صفوف الانتظار. وفي هذا النموذج يفترض أن وصول الزبائن إلى نظام الخدمة يتم بناءاً على عملية بواسون وأن الخادم المنفرد يخدمهم بناء على التوزيع الأسي. يمكن وصف هذا النموذج باختيار معاملات الولادة والوفاة كالآتي:

$$\lambda_k = \lambda\,,\; k = 0,1,2,\cdots$$

$$\mu_k = \mu,\;\; k = 1,2,\cdots$$

باستخدام هذه المعاملات في المعادلة (٩,٥) نحصل على:

$$p_n = p_0 \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda}{\mu},\; n = 1,2,\cdots$$

أي أن:

$$p_n = p_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n,\; n = 0,1,2,\cdots \qquad (٩,٨)$$

وفي هذه الحالة تأخذ المتسلسلة (٩,٧) الصورة $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda/\mu)^n$ ، ومن ثَم فإن الشرط الضروري والكافي لوجود حل الحالة المستقر يصبح $\rho < 1$ ، حيث إن $\rho = \lambda/\mu$ والذي

يسمى في الغالب بمعامل الإفادة utilization factor.

يتبقى لنا الآن فقط الحصول على p_0 ، والذي يمكن الحصول عليه باستخدام العلاقة (٩,٦)، حيث إن المجموع يتقارب إذا كان $\lambda < \mu$ ، ومن ثم فإن:

$$\begin{aligned} 1 &= p_0\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right] \\ &= p_0\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\rho^n\right] \\ &= p_0\left[1+\rho\sum_{n=1}^{\infty}\rho^{n-1}\right] \\ &= p_0\left[1+\rho\frac{1}{1-\rho}\right] \\ &= p_0\left[\frac{1-\rho+\rho}{1-\rho}\right] \\ &= p_0\left[\frac{1}{1-\rho}\right] \end{aligned}$$

إذن:

$$p_0 = 1-\rho$$

ومن المعادلة (٩,٨) نحصل في النهاية على:

$$p_n = (1-\rho)\rho^n,\ n = 0,1,2,\cdots$$

يمكن الحصول على نفس النتيجة باستخدام الدالة المولدة للاحتمال (نظر تمرين (٩,٢)).

وسنوضح كيفية الحصول على مقاييس الفعالية المختلفة، لهذا النموذج، التي ذكرناها في البند (٩,٢).

١- متوسط عدد الزبائن في النظام في الحالة المستقرة هو:

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n\, p_n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n(1-\rho)\rho^{n}$$

$$= \rho(1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty} n\ \rho^{n-1}$$

$$= \rho(1-\rho) \times \frac{1}{(1-\rho)^{2}}$$

$$= \frac{\rho}{1-\rho}$$

وبشكل مكافئ:

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

٢- يمكن الحصول على متوسط الزمن الذي يقضيه كل زبون في النظام في الحالة المستقرة، باستخدام صيغة لتل، كالآتي:

$$W = \frac{L}{\lambda}$$

$$= \frac{1}{\mu - \lambda}$$

٣- متوسط زمن انتظار كل زبون في النظام في الحالة المستقرة هو:

$$W_q = W - E[s_1]$$

$$= \frac{1}{\mu - \lambda} - \frac{1}{\mu}$$

$$= \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$

٤- أخيراً، يمكن استنتاج متوسط عدد الزبائن في النظام في الحالة المستقرة باستخدام صيغة لتل كالآتي:

$$L_q = \lambda W_q$$

$$= \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$$

مثال (٩,١): (محل تصليح مكانس كهربائية منزلية)

تصل المكانس الكهربائية إلى محل الإصلاح بشكل عشوائي بمتوسط أربع مكانس في اليوم، يعمل عامل الإصلاح ثمان ساعات يومياً. ويتغير زمن إصلاح المكنسة حسب نوع الإصلاح المطلوب، ولكنه يتبع توزيعاً أسياً بالمتوسط 90 في الدقيقة.

١- أوجد نسبة الوقت الذي يُعطل فيه عامل الإصلاح عن العمل.

٢- أوجد متوسط عدد المكانس الكهربائية في المحل والتي تنتظر عملية الإصلاح.

٣- ما عدد المكانس، التي أُحضرت للتصليح من نفس النوع، المنتظرة أمام عامل الإصلاح؟

الحل

لنفرض أن الساعة هي وحدة قياس الزمن، لدينا في هذا المثال نظام صفوف انتظار بعامل خدمة منفرد وأزمنة وصول عشوائية بمعدل $\lambda = \frac{1}{2}$ مكنسة كل ساعة، وأزمنة خدمة تتبع التوزيع الأسي بالمتوسط $\frac{3}{2} = \frac{1}{\mu}$ساعة، ومن ثَم فإن $\mu = \frac{2}{3}$. لذا فإن $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{3}{4} < 1$، ومن ثم فإن الحل المستقر موجود، وأن:

١- نسبة الوقت الذي يُعطل فيه عامل الإصلاح عن العمل هي $p_0 = 1 - \rho = \frac{1}{4}$.

٢- متوسط عدد المكانس الكهربائية في المحل والتي تنتظر عملية الإصلاح يساوي متوسط عدد المكانس في الصف انتظار $L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{9}{4}$.

٣- عدد المكانس، التي أُحضرت للتصليح من نفس النوع، المنتظرة أمام عامل الإصلاح يساوي متوسط عدد المكانس في النظام $L = \frac{\rho}{1-\rho} = 3$.

- نموذج صف انتظار M/M/1/K

سنقدم الآن نظام صفوف انتظار يمكن ألاّ يستقبل أكثر من عدد معين من الزبائن، وكمثال: نفرض أن النظام يمكن أن يستقبل على الأكثر عدد K من الزبائن، بما فيهم هؤلاء الذين يستقبلون الخدمة، وعندما يصل أي زبون إضافي فإنه لن يسمح له بدخول النظام ويغادر بدون

الحصول على الخدمة. يمكن وصف هذا النظام باختيار معاملات الوفاة والولادة على النحو التالي:

$$\lambda_k = \begin{cases} \lambda, & k < K, \\ 0, & k \geq K, \end{cases}$$

$$\mu_k = \mu, \ k = 1,2,\cdots,K$$

بالتعويض في المعادلة (٩,٥) نحصل على:

$$p_n = p_0 \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda}{\mu}$$

أي أن:

$$p_n = p_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n, \ n \leq K \tag{٩,٩}$$

بالطبع لدينا أيضاً:

$$p_n = 0, \ n > K \tag{٩,١٠}$$

وللحصول على p_0 ، نعوض بالمعادلتين (٩,٩)، (٩,١٠) في المعادلة (٩,٦) لنحصل على:

$$\begin{aligned} 1 &= p_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{K} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \right] \\ &= p_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{K} \rho^n \right] \end{aligned}$$

إذا كانت $\rho = 1$ فإن:

$$1 = p_0 [1 + K]$$

ومن ثَم:

$$p_0 = \frac{1}{1+K}$$

إذا كانت $\rho \neq 1$ فإن:

$$1 = p_0 \left[1 + \rho \sum_{n=0}^{K-1} \rho^n \right]$$

$$= p_0\left[1+\rho\times\frac{1-\rho^K}{1-\rho}\right]$$
$$= p_0\left[\frac{1-\rho+\rho-\rho^{K+1}}{1-\rho}\right]$$
$$= p_0\left[\frac{1-\rho^{K+1}}{1-\rho}\right]$$

إذن:

$$p_0=\frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}$$

أي أن:

$$p_0=\begin{cases}\dfrac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}, & \rho\neq 1\\[2mm] \dfrac{1}{K+1}, & \rho=1.\end{cases}$$

بالتعويض في العلاقة (٩,٩) نحصل في النهاية على p_n ، لأي $n \le K$ ، في الصورة التالية:

$$p_n=\begin{cases}\dfrac{(1-\rho)\,\rho^n}{1-\rho^{K+1}}, & \rho\neq 1\\[2mm] \dfrac{1}{K+1}, & \rho=1.\end{cases}$$

نلاحظ أن الحل المستقر موجود حتى إذا كان $\rho \ge 1$. ونلاحظ أيضاً أنه عندما $K \to \infty$ ، أي عندما نلغي شرط أن النظام يمكن أن يستقبل على الأكثر عدد K من الزبائن، فإننا نحصل على النتائج التي حصلنا عليها في النموذج M/M/1.

مثال (٩,٢)

تقدم إحدى السكرتيرات خدمة لطلاب الدراسات العليا لكتابة رسائل الماجستير والدكتوراة. وبسبب هذا العمل الكبير الذي ستقوم به خارج وقت دوامها في العمل، فهي ترتب هذا العمل على النحو التالي: لن تقبل رسالةً جديدةً إذا كان عندها رسالتان

في الانتظار بالإضافة إلى الرسالة التي تقوم بكتابتها في الوقت الراهن. ولنفرض أن النموذج المناسب لهذا النظام هو أن عدد الرسائل التي تصل عشوائياً إلى السكرتيرة لكتابتها يكون بمعدل رسالة واحدة كل 60 يوماً. ويتبع زمن كتابة الرسالة توزيعاً أسياً بالمتوسط 30 يوماً. أوجد متوسط عبء العمل الكلي في النظام عند أي لحظة.

الحل

من المناسب أخذ متوسط زمن الخدمة (30 يوماً) كوحدة قياس الزمن، ومن ثَم يكون لدينا في هذا المثال نظام صفوف انتظار بعامل خدمة منفرد وأزمنة وصول عشوائية بمعدل $\lambda = \frac{1}{2}$ ومعدل خدمة $\mu = 1$ لوحدة الزمن المفروضة. لن يسمح لأكثر من ثلاثة زبائن (رسائل) في النظام عند أي لحظة. أي أن $K = 3$. يمكن استخدام المعادلة (٩,٩) لحساب احتمالات الحالة المستقرة:

$$p_3 = \frac{1}{8} p_0 \text{ ، } p_2 = \frac{1}{4} p_0 \text{ ، } p_1 = \frac{1}{2} p_0$$

ومن ثَم فإن:

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) p_0 = 1$$

ومن ثم نحصل في النهاية على:

$$p_3 = \frac{1}{15} \text{ ، } p_2 = \frac{2}{15} \text{ ، } p_1 = \frac{4}{15} \text{ ، } p_0 = \frac{8}{15}$$

مثال (٩,٣)

تمتلك محطة خدمة للسيارات مضخة بنزين واحدة وموقفين لانتظار سيارتين في فنائها. يمكن مرور زبائن عشوائياً على المحطة بمتوسط زبون واحد كل ثمان دقائق. زمن خدمة أي زبون يتبع توزيعاً أسياً بمتوسط 4 دقائق.

١- أوجد نسبة الوقت الذي يوجد عنده 0، 1، 2، 3 من السيارات في المحطة.

٢- أوجد احتمال فقدان الزبائن بسبب محدودية المكان في المحطة.

٣- بفرض أنه يمكن لصاحب المحطة أن يستأجر موقفاً لسيارة أخرى بتكلفة 10 ريالات

في الأسبوع، والذي يزيده ربحًا بمقدار 0.5 من الريالات على كل زبون ، وأن المحطة تعمل 10 ساعات في اليوم. هل تنصح المالك باستئجار هذا الموقف؟

الحل

لدينا في هذا المثال معدل الوصول $\lambda = \frac{1}{8}$ ومعدل خدمة $\mu = \frac{1}{4}$، سعة النظام $K = 3$.

١- باتباع نفس الخطوات في المثال السابق، نحصل على:

$$p_3 = \frac{1}{15} \text{ ، } p_2 = \frac{2}{15} \text{ ، } p_1 = \frac{4}{15} \text{ ، } p_0 = \frac{8}{15}$$

٢- ومن ثم فإن $p_3 = \frac{1}{15}$ هو احتمال فقدان أحد الزبائن بسبب عدم وجود مكان لسيارته.

٣- والآن $K = 4$ ، ومن ثَم يمكن الحصول على احتمالات وجود 0، 1، 2، 3 في النظام، بطريقة مماثلة:

$$p_4 = \frac{1}{31} \text{ ، } p_3 = \frac{2}{31} \text{ ، } p_2 = \frac{4}{31} \text{ ، } p_1 = \frac{8}{31} \text{ ، } p_0 = \frac{16}{31}$$

عندما يكون هناك مكان لثلاث سيارات، فإنه يمكن إدراك $1 - 1/15 = 14/15$ من الزبائن. والفائدة في الأسبوع هي:

$$\frac{14}{15} \times \frac{1}{8} \times 600 \times 7 \times 0.5 = 245\,SR$$

أما عندما يكون هناك مكان لأربع سيارات، فإنه يمكن إدراك $1 - p_4 = 30/31$ من الزبائن. وأن الفائدة في الأسبوع هي:

$$\frac{30}{31} \times \frac{1}{8} \times 600 \times 7 \times 0.5 - 10 = 244.03\,SR$$

ومن ثَم فإن المالك لن يحصل على تكلفة إيجار الموقف الإضافي، ومن ثم لا ننصح باستئجاره.

– نموذج صف انتظار M/M/c

في هذا النظام نفرض أنه يحتوي على غرفة انتظار غير منتهية وأن معدل الوصول كمية ثابتة. يقدم هذا النظام على الأكثر عدد c من الخدم يعملون على التوازي. يمكن وصف هذا النظام باختيار معاملات الوفاة والولادة على النحو التالي:

$$\lambda_k = \lambda,\ k = 0,1,2,\cdots,$$
$$\mu_k = \begin{cases} k\mu, & 1 \le k \le c, \\ c\mu, & k \ge c. \end{cases}$$

ويمكن بالتعويض في المعادلة (٩,٧) أن نحصل على:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\prod_{i=1}^{c}\frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}\right)\left(\prod_{i=c+1}^{n}\frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\prod_{i=1}^{c}\frac{\lambda}{k\mu}\right)\left(\prod_{i=c+1}^{n}\frac{\lambda}{c\mu}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{k\mu}\right)^{c}\left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^{n-c} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k^{c}\,c^{n-c}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n} \\
&= \left(\frac{c}{k}\right)^{c}\times\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^{n} \\
&= \left(\frac{c}{k}\right)^{c}\times\frac{\lambda}{c\mu}\times\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^{n}
\end{aligned}$$

ومن ثم فإن الشرط الكافي لوجود الحل المستقر هو $\lambda/(c\mu) \le 1$. وعندما نريد الحصول على p_n من المعادلة (٩,٥) نجد أننا يجب أن نجزئ الحل إلى جزأين، وذلك لأن μ_k تعتمد على k من خلال جزأين، ومن ثم فإن:

$$p_n = \begin{cases} p_0 \dfrac{(c\rho)^n}{n!}, & n \le c, \\ p_0 \dfrac{c^c \rho^n}{c!}, & n \ge c. \end{cases}$$

حيث $\rho = \lambda/(c\mu)$. ويمكن استخدام العلاقة (٩،٦) للحصول على p_0 ، كالآتي:

$$\begin{aligned} 1 &= p_0\left[1+\sum_{k=1}^{c-1}\frac{(c\rho)^k}{k!}+\sum_{k=c}^{\infty}\frac{(c\rho)^k}{c!}\frac{1}{c^{k-c}}\right] \\ &= p_0\left[\sum_{k=0}^{c-1}\frac{(c\rho)^k}{k!}+\frac{c^c}{c!}\sum_{k=c}^{\infty}\frac{(c\rho)^k}{c^k}\right] \\ &= p_0\left[\sum_{k=0}^{c-1}\frac{(c\rho)^k}{k!}+\frac{c^c}{c!}\sum_{k-c=0}^{\infty}\rho^{k-c+c}\right] \\ &= p_0\left[\sum_{k=0}^{c-1}\frac{(c\rho)^k}{k!}+\frac{c^c\rho^c}{c!}\sum_{k-c=0}^{\infty}\rho^{k-c}\right] \\ &= p_0\left[\sum_{k=0}^{c-1}\frac{(c\rho)^k}{k!}+\frac{(c\rho)^c}{c!}\frac{1}{1-\rho}\right] \end{aligned}$$

أي أن:

$$p_0 = \left[\sum_{k=0}^{c-1}\frac{(c\rho)^k}{k!}+\frac{(c\rho)^c}{c!}\frac{1}{1-\rho}\right]^{-1}$$

واحتمال إجبار أحد الزبائن، الذين يصلون إلى النظام، على الوقوف في صف انتظار هو:

$$\begin{aligned} P(\text{الاصطفاف}) &= \sum_{k=c}^{\infty} p_k \\ &= \sum_{k=c}^{\infty} p_0 \frac{c^c \rho^k}{c!} \\ &= p_0 \frac{c^c}{c!}\sum_{k=c}^{\infty}\rho^{k-c+c} \\ &= p_0 \frac{(c\rho)^c}{c!}\sum_{k=c}^{\infty}\rho^{k-c} \end{aligned}$$

$$= p_0 \frac{(c\rho)^c}{c!} \frac{1}{1-\rho}$$

$$= \frac{(c\rho)^c}{(1-\rho)c!\left[\sum_{k=0}^{c-1} \frac{(c\rho)^k}{k!} + \frac{(c\rho)^c}{c!} \frac{1}{1-\rho}\right]}$$

يتمتع هذا الاحتمال بالاستخدامات الكثيرة في أنظمة الهواتف، فهو يعطي احتمال عدم وجود دائرة اتصال هاتفي متاحة لاستقبال مكالمة (زبون) في نظام مكون من c دوائر اتصال هاتفية، تسمى هذه العلاقة بصيغة أيرلنج Erlang's formula والتي نشير إليها بالرمز $C(c, \lambda/\mu)$.

مثال (٩,٤)

لنفرض وجود نظام صفوف انتظار بعاملي خدمة (بخادمين):

١- أوجد p_n لكل $n \geq 0$، ومتوسط عدد الزبائن في هذه الحالة بالتفصيل.

٢- بفرض التطبيق التالي: مرحلة إتمام العناصر في عملية إنتاج معينة تكون عبارة عن إدخال العنصر في أحد ماكينتين متطابقتين لإتمام عملية الصنع. تصل العناصر عشوائياً بمعدل 100 كل ساعة في المتوسط، وزمن العملية الأخير على الماكينة الثانية يتبع توزيعاً أسياً بمتوسط دقيقة واحدة.

(أ) ما هو متوسط عدد العناصر المنتظرة لعملية إتمام الصنعة؟

(ب) ستظهر مشكلة في التخزين إذا زاد عدد العناصر المنتظرة لعملية إتمام الصنعة عن عشرة عناصر. ما هو احتمال حدوث هذه المشكلة؟

الحل

حيث إنه يوجد خادمان في النظام، إذن $c = 2$.

١- لدينا في هذه الحالة الخاصة ما يلي:

$$p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0 \text{ ، } p_2 = \frac{\lambda^2}{2\mu^2} p_0 \text{ ، } p_3 = \frac{\lambda^3}{2^2 \mu^3} p_0 \text{ ،}$$

$$p_n = 2\rho^n \, p_0 \, , n = 1,2,3,\cdots$$

ومن ثَم فإن:

$$1 = \left[1 + 2\left(\rho + \rho^2 + \rho^3 + \cdots\right)\right] p_0$$
$$= \left[1 + 2\frac{\rho}{1-\rho}\right] p_0$$
$$= \left[\frac{1-\rho+2\rho}{1-\rho}\right] p_0$$

أي أن:

$$p_0 = \frac{1-\rho}{1+\rho},$$

ومن ثَم فإن:

$$p_n = 2\left(\frac{1-\rho}{1+\rho}\right)\rho^n,\ n \geq 1$$

يمكن الحصول على متوسط عدد العناصر في النظام كالآتي:

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} n\, p_n$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} 2n\left(\frac{1-\rho}{1+\rho}\right)\rho^n$$
$$= 2\rho\left(\frac{1-\rho}{1+\rho}\right)\sum_{n=1}^{\infty} n\ \rho^{n-1}$$
$$= 2\rho\left(\frac{1-\rho}{1+\rho}\right)\frac{1}{(1-\rho)^2}$$
$$= \frac{2\rho}{1-\rho^2}$$

٢- لدينا هنا نموذج صفوف انتظار M/M/2، ولو افترضنا أن الدقيقة الواحدة هي مقياس وحدة الزمن، إذن $\frac{5}{3} = \frac{100}{60} = \lambda$ سيكون معدل وصول العناصر في الدقيقة، ويكون $\mu = 1$. ومن ثَم فإن $\rho = \frac{5}{8}$ ، وباستخدام الفقرة (١) نحصل على:

$p_0 = \frac{1-\frac{5}{6}}{1+\frac{5}{6}} = \frac{1}{11}$ ، $p_n = \frac{2}{11}\left(\frac{5}{6}\right)^n$ ، لكل $n \geq 1$.

(أ) متوسط عدد العناصر في صف انتظار هو $L_q = L - c\rho$ (انظر تمرين (٩,٨))، ومن ثَم فإن:

$$L_q = \frac{2\rho}{1-\rho^2} - 2\rho = \frac{2\rho^3}{1-\rho^2} = \frac{125}{33} \approx 4.$$

(ب) لنفرض أن M يرمز إلى عدد العناصر في صف انتظار، وأن $q_m = P(M = m)$، ومن ثم لدينا:

$$\begin{aligned} q_0 &= p_0 + p_1 + p_2 \\ &= \frac{1}{11}\left[1 + \frac{5}{3} + 2\left(\frac{5}{6}\right)^2\right] = \frac{73}{11\times 18} \end{aligned}$$

$$q_1 = p_3 = \frac{2}{11}\left(\frac{5}{6}\right)^3$$

$$q_2 = p_4 = \frac{2}{11}\left(\frac{5}{6}\right)^4$$

$$q_3 = p_5 = \frac{2}{11}\left(\frac{5}{6}\right)^5, \cdots$$

ومن ثَم فإن:

$$\begin{aligned} P(M \le 10) &= q_0 + q_1 + \cdots + q_{10} \\ &= \frac{73}{11\times 18} + \frac{2}{11}\frac{125}{216}\left[1 + \frac{5}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{5}{6}\right)^9\right] \\ &= \frac{73}{198} + \frac{2}{11}\frac{125}{216}\frac{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{10}}{1-\frac{5}{6}} \\ &= \frac{73}{198} + \frac{125}{198}\left[1-\left(\frac{5}{6}\right)^{10}\right] \\ &= 1 - \frac{125}{198}\left(\frac{5}{6}\right)^{10} \end{aligned}$$

وفي النهاية نحصل على:

$$P(M>10)=\frac{125}{198}\left(\frac{5}{6}\right)^{10}\approx 0.102$$

ومن ثَم فإنه يمكن حدوث مشكلة في التخزين بنسبة 10%. وبعبارةٍ أخرى يمكن القول بأن مشاكل التخزين ستسبب عرقلة للنظام بحوالي 10% من وحدة الزمن.

– **نموذج صف انتظار $M/M/c/K$:**

يفترض في هذا النظام وجود عدد من الخدم يعملون بشكل متوازٍ ولكن يمكن للنظام أن يخدم عدداً محدوداً من الزبائن. يمكن التحقق من هذا القيد باختيار معاملات الوفاة والولادة على النحو التالي:

$$\lambda_k=\begin{cases}\lambda, & 0\le k\le c,\\ 0, & k\ge c.\end{cases}$$

$$\mu_k=k\,\mu,\ k=1,2,\cdots,c.$$

يمكن بالتعويض في المعادلة (٩,٧) نحصل على:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}=0$$

ومن ثم فإن الحل المستقر يكون موجوداً دائماً. باستخدام المعادلة (٩,٥) نحصل على:

$$p_n=\begin{cases}p_0\dfrac{(\lambda/\mu)^n}{n!}, & 0\le n\le c,\\ p_0\dfrac{1}{c^{n-c}}\dfrac{(\lambda/\mu)^n}{c!}, & c\le n\le K.\end{cases}$$

يمكن الحصول على p_0 ، باستخدام العلاقة (٩,٦)، كالآتي:

$$p_0=\left[\sum_{n=0}^{c-1}\frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}+\sum_{n=c}^{K}\frac{1}{c^{n-c}}\frac{(\lambda/\mu)^n}{c!}\right]^{-1}$$

ويمكن تبسيط هذه العلاقة لنحصل على:

$$p_0 = \begin{cases} \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^c}{c!} \frac{1-(\lambda/c\mu)^{K-c+1}}{1-(\lambda/c\mu)} \right]^{-1}, & \lambda/c\mu \neq 1, \\ \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^c}{c!} (K-c+1) \right]^{-1}, & \lambda/c\mu = 1 \end{cases}$$

مثال (٩,٥)

بالعودة إلى المثال (٩,٣)، إذا كان تأجير قطعة الأرض المجاورة تُمكن مالك محطة الخدمة من تركيب مضخة ثانية وتوفير مكاني انتظار لسيارتين في فناء المحطة (ليصبح عدد السيارات التي يمكن أن تنتظر في الفناء يساوي 4)، قدر الفائدة التي يمكن أن يحصل عليها المالك في الأسبوع. هل هذا يعني أنه من الأفضل أن يستأجر هذه الأرض؟

الحل

لدينا الآن $K = 4$ ، $c = 2$ ، $\lambda = \frac{1}{8}$ ، $\mu = \frac{1}{4}$ ، ولذلك:

$$p_4 = \frac{1}{128} p_0 \text{ ، } p_3 = \frac{1}{32} p_0 \text{ ، } p_2 = \frac{1}{8} p_0 \text{ ، } p_1 = \frac{1}{2} p_0$$

ولأن $p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$ إذن:

$$p_4 = \frac{1}{213} \text{ ، } p_3 = \frac{4}{213} \text{ ، } p_2 = \frac{16}{213} \text{ ، } p_1 = \frac{64}{213} \text{ ، } p_0 = \frac{128}{213}$$

ومن ثم فإن نسبة الزبائن الذين يمكن أن يستقبلوا الخدمة هي 212/213. ومن ثم فإن متوسط الفائدة في الأسبوع هو:

$$\frac{212}{213} \times \frac{1}{8} \times 600 \times 7 \times 0.5 - 10 = 251.27\,SR\ (> 245)$$

ومن ثَم فإن استئجار قطعة الأرض وتركيب المضخة الثانية سيدر نفعاً على المالك، ومن ثم يُنصح بعمل ذلك.

مثال (٩,٦)

يمتلك محول هاتف قروي 100 دائرة تمكنه من حمل 100 مكالمة. يتم تعليق أي مكالمة جديدة عندما تكون جميع الدوائر مشغولة. مدة المكالمات تتبع توزيعاً أسياً بمتوسط دقيقتين،

وتصل المكالمات إلى التحويلة بناء على عملية بواسون بمعدل 20 مكالمة في الدقيقة، ما هو احتمال تعليق مكالمة؟

الحل

يمكن استخدام نموذج صف انتظار M/M/100/100 لدراسة هذا المحول، وعندما $c=K$ فإن الاحتمالات النهائية تحقق العلاقة التالية:

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{r^n/n!}{\sum_{j=0}^{c} r^j/j!}, & 0 \le n \le c, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

حيث إن $r = \frac{\lambda}{\mu}$. يتم تعليق المكالمة الجديدة إذا وصلت إلى التحويلة عندما يكون c من الدوائر مشغولة (أي حدوث وصول جديد عندما يحتوي صف انتظار على c من الزبائن)، ومن ثم فإن احتمال تعليق مكالمة جديدة هو (تسمى هذه العلاقة بصيغة إيرلنج-B):

$$p_c = \frac{r^c/c!}{\sum_{j=0}^{c} r^j/j!} = \frac{80^{100}/100!}{\sum_{j=0}^{100} 80^j/j!} = 0.004$$

– نموذج صف انتظار M/M/∞

يسمى هذا النموذج بنموذج صفوف انتظار بخدمة غير محدودة، أي أن هذا النموذج يحتوي على عدد غير محدود من القائمين بالخدمة. أحياناً يشار إلى هذا النموذج بنموذج الخدمة الفسيح (الوافر) ample-server model. يمكن استخدام مركز خدمة ذاتية كمثال جيد لهذا النوع من النماذج. كما يمكن استخدام عملية ولادة ووفاة بالمعاملات التالية لدراسة هذا النموذج:

$$\lambda_k = \lambda, \quad k = 0,1,2,\cdots$$
$$\mu_k = k\mu,\ k = 1,2,\cdots.$$

وبناء على هذا الاختيار نحصل على:

$$p_n = p_0 \frac{\rho^n}{n!}, n = 0,1,2\cdots$$

حيث إن $\rho = \lambda/\mu$. وباستخدام العلاقة (٩,٦)، يمكن الحصول على p_0 ، كالآتي:

$$p_0 = e^{-\rho}$$

وفي النهاية نحصل على:

$$p_n = e^{-\rho}\frac{\rho^n}{n!}, n = 0,1,2\cdots$$

ومن ثم فإن توزيع الحالة المستقر لوجود عدد n في النظام يكون عبارة عن توزيع بواسون بالمعلمة $\rho = \lambda/\mu$. وأن شرط وجود الحل المستقر هو $\rho = \lambda/\mu < \infty$.

مثال (٩,٧)

أرادت محطة تلفزيونية في إحدى العواصم معرفة متوسط عدد مشاهدي أحد برامجها الأساسية في مساء يوم السبت. بناء على دراسة سابقة وجدت هذه المحطة أن عدد الأشخاص الذين يشاهدون هذا البرنامج يتبع توزيع بواسون بالمعدل 100000 في الساعة. يوجد خمس قنوات أساسية في هذه العاصمة ويعتقد أن أي شخص يمكن أن يختار بين هذه القنوات الخمس بشكل عشوائي. وبناء على دراسة سابقة أيضاً، اتضح أن وقت مشاهدة التلفاز لأي شخص يتبع توزيعاً أسياً بمتوسط 90 دقيقة.

الحل

لدينا في هذا المثال $\lambda = \frac{100000}{5} = 20000$ مشاهد في الساعة، و $\frac{1}{\mu} = 3/2$ ساعة. وحيث إن الحالة المستقرة لوجود عدد n من الزبائن يتبع توزيع بواسون بالمعلمة λ/μ ، إذن متوسط عدد المشاهدين هو:

$$L = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{20000 \times 3}{2} = 30000$$

بجانب هذه النماذج التي قدمناها يوجد بعض النماذج الأخرى تعتمد على عملية الولادة والوفاة، مثل نموذجي المجتمعات والمصادر المنتهية. سنمتنع عن وصف مثل هذه النماذج في هذا الكتاب إيماناً منا بأن القارئ أصبح على دراية كافية بفهم تطبيقات عمليات الولادة والوفاة في نظرية صفوف الانتظار. والآن سنقدم بعض النماذج التي تستخدم عمليات لا ولادة ولا وفاة.

(٩,٤) نماذج لاولادة ولاوفاة لصفوف الانتظار

Non birth-and-death queueing models

يعتبر هذا البند امتداداً لنماذج ماركوف، إلا أننا هنا نفترض أن عمليتي الوصول والخدمة تكون عبارة عن عملية لا ولادة ولا وفاة. وهذا يعني أنه من الممكن حدوث أكثر من تغير في الفترات الزمنية الصغيرة جداً، ولكن مع الاحتفاظ بخاصية فقدان ذاكرة ماركوف. سنهتم في هذا الجزء بالنتائج المتزنة فقط. وفي الحقيقة للنماذج التي سنقدمها هنا، تم استنتاج نتائج الحالة المستقرة في الفصل الثامن، كما سنرى لاحقاً.

كما هو الحال في نماذج صفوف انتظار الولادة والوفاة، فإنه يمكن تنظيم صفوف انتظار متعددة باختيار معاملات الولادة λ_k ومعاملات الوفاة μ_k. سنقدم فيما يلي نموذجين للتوضيح، كما نوجه عناية القارئ المهتم للعديد من الكتب المتاحة والخاصة بنظرية صفوف الانتظار.

– نموذج صف انتظار $M^{[X]}/M/1$

لنفرض أن نظام صفوف انتظار حيث إنه بالإضافة إلى أن عملية الوصول تتبع عملية بواسون بالمعدل $0 < \lambda$ ، فإن العدد الفعلي للزبائن في أي وحدة قياس للوصول يكون عبارة عن متغير عشوائي X، والذي يمكن أن يأخذ أي عدد صحيح غير سالب ومحدود x باحتمال a_x . عملية الوصول الكلي هنا تكون عبارة عن عملية بواسون المركبة التي ذكرناها في الفصل السابع. بأخذ عدد الزبائن في النظام كمتغير الحالة، نجد أنه يمكن الدخول في الحالة k من أي حالة أسفل منها (تحتها)، وبالمثل يمكن التحرك من الحالة k إلى أي حالة أعلى منها، المعدل الفعلي لترك الحالة k يصبح $\lambda a_1 + \lambda a_2 + \cdots = \lambda$. لنفرض أن p_k هو الاحتمال المتزن لعدد العناصر في النظام، فإنه يمكن التحقق من أن معادلات الاتزان تأخذ الصورة التالية:

$$0 = -\lambda p_0 + \mu p_1$$

$$0 = -\lambda \sum_{k=1}^{n} p_k p_{n-k} - (\lambda + \mu) p_n + \mu p_{n+1} , n = 1,2,\cdots \qquad (٩,١١)$$

والتي تكون عبارة عن معادلات الحالة المستقرة (٨,٣) والتي استنتجناها في نمـــوذج الـــولادة الجماعية. وقد قدمنا في الفصل الثامن حل الدالة المولدة للاحتمال لهذ المعادلات.

مثال (٩,٨)

لنفرض وجود نظام صفوف انتظار بخادم منفرد وأن الوصول يتم بناء على عملية بواسون، وأن زمن الخدمة يتبع توزيعاً أسياً. ولنفرض أن الزبائن تصل في مجموعتين وأن كل مجموعة تُخدم بشكل منفرد. في هذه الحالة، يكون لدينا $\rho = \frac{2\lambda}{\mu}$ ، $\rho = 1 - \rho$ ، $A(z) = z^2$. وبأخذ $r = \frac{\rho}{2}$ ، إذن من المعادلة (٥,٨) نحصل على:

$$\begin{aligned}
P(z) &= \frac{\mu(1-z)\,p_0}{\mu(1-z) - \lambda z\left[1 - A(z)\right]} \\
&= \frac{\mu(1-z)\,p_0}{\mu(1-z) - \lambda z\left[1 - z^2\right]} \\
&= \frac{1-2r}{1 - rz(1+z)} \\
&= \frac{1-2r}{-rz^2 - rz + 1}
\end{aligned}$$

المعادلة $-rz^2 - rz + 1 = 0$ لها جذران حقيقيان مختلفان، يمكن أن نرمز لهما بالرمزين z_0 ، z_1 ، ومن ثَم فإن $-rz^2 - rz + 1 = -r(z_0 - z)(z_1 - z)$. ومن ثم فإن:

$$\frac{1-2r}{-rz^2 - rz + 1} = \frac{2r-1}{r}\left[\frac{1}{z_1 - z_0}\frac{1}{z_0 - z} - \frac{1}{z_1 - z_0}\frac{1}{z_1 - z}\right]$$

ومن ثَم:

$$\begin{aligned}
P(z) &= \frac{2r-1}{r}\frac{1}{z_1 - z_0}\left(\frac{1}{z_0 - z} - \frac{1}{z_1 - z}\right) \\
&= \frac{2r-1}{r}\frac{1}{z_1 - z_0}\left(\frac{1}{z_0}\frac{1}{1-(z/z_0)} - \frac{1}{z_1}\frac{1}{1-(z/z_1)}\right) \\
&= \frac{2r-1}{r}\frac{1}{z_1 - z_0}\left(\frac{1}{z_0}\sum_{n=0}^{\infty}(z/z_0)^n - \frac{1}{z_1}\sum_{n=0}^{\infty}(z/z_1)^n\right)
\end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{2r-1}{r} \frac{1}{z_1 - z_0} \left(\frac{1}{z_0^{n+1}} - \frac{1}{z_1^{n+1}} \right) \right] z^n$$

ومن ثَم:

$$p_n = \frac{2r-1}{r} \frac{1}{z_1 - z_0} \left(\frac{1}{z_0^{n+1}} - \frac{1}{z_1^{n+1}} \right), n \geq 1$$

– نموذج صف انتظار $M/M^{[Y]}/1$:

لنفرض وجود نظام صفوف انتظار حيث إنه بالإضافة إلى أن عملية الوصول تتبع عملية بواسون بالمعدل $\lambda > 0$ ، فإنه يمكن خدمة عدد K من الزبائن في نفس الوقت إلا إذا كان عدد الزبائن في النظام أقل من العدد K. نعتبر هنا متغير الحالة هو عدد العناصر في النظام. ومن ثَم فإنه باستثناء الحالة 0 ، يمكن تفسير جميع الحالات على نفس المنوال التالي:

١- أي حالة يمكن للنظام أن يدخلها من الحالة المجاورة لها من جهة اليسار، وذلك بحدوث وصول، أو من الحالة المجاورة لها بـــ K من الوحدات من جهة اليمين، وذلك عندما تغادر مجموعة النظام.

٢- أي حالة يمكن للنظام أن يغادرها إلى حالة مجاورة إلى اليسار، وذلك بحدوث وصول، أو إلى حالة تبعد عنها بـــ K من الوحدات من جهة اليمين، وذلك عندما تغادر مجموعة النظام.

٣- يمكن للنظام أن يدخل إلى الحالة 0 مباشرة من أي حالة من الحالات بالعدد K الموجودة على يمين الحالة 0، ويغادر الحالة 0 عند حدوث وصول فقط.

يقود هذا الوصف مباشرة إلى معادلات الاتزان التالية:

$$0 = -\lambda p_0 + \mu p_1 + \cdots + \mu p_{K-1} + \mu p_K$$

(٩,١٢)

$$0 = \mu p_{n+K} - (\lambda + \mu) p_n + \mu p_{n-1} , n = 1,2,\cdots$$

والتي تكون تماماً عبارة عن نفس المعادلات (٨,٤) والتي استنتجت في حالة نموذج الوفاة الجماعي. وقد استخدمنا المؤثرات في الفصل الثامن لحل هذه المعادلات.

مثال (٩,٩)

يمكن استخدام الدالة المولدة للاحتمال في هذا النموذج كما فعلنا في النموذج السابق. ففي هذه الحالة، يمكن توضيح أن:

$$P(z) = \frac{(1-z^K)\sum_{n=0}^{K-1} p_n z^n}{\rho z^{K+1} - (\rho+1) z^K + 1}$$

حيث إن $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$. وباستخدام جذور مقام الدالة المولدة للاحتمال، يمكن كتابة العلاقة التالية (البرهان على ذلك يقع خارج نطاق هذا الكتاب) :

$$\sum_{n=0}^{K-1} p_n z^n = A \frac{\rho z^{K+1} - (\rho+1) z^K + 1}{(z-1)(z-z_0)}$$

حيث إن z_0 يكون جذراً منفرداً للبسط والذي يقع خارج دائرة الوحدة. وبالتعويض في $P(z)$ نحصل على:

$$P(z) = \frac{A(1-z^K)}{(z-1)(z-z_0)} = \frac{A}{(z-z_0)} \sum_{n=0}^{K-1} z^n$$

وحيث إن $P(1) = 1$ ، إذن:

$$A = \frac{z_0 - 1}{K}$$

ومن ثم نحصل على:

$$P(z) = \frac{(z_0 - 1)\sum_{n=0}^{K-1} z^n}{K(z_0 - z)} \qquad (٩,١٣)$$

ولكي نحصل على p_n ، فإنه من الضروري أن نفك التعبير (٩,١٣) باستخدام مفكوك ماكلورين Mclaurin، لنحصل على:

$$p_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dz^n} \left[\frac{(z_0 - 1)\sum_{n=0}^{K-1} z^n}{K(z_0 - z)} \right] \Bigg|_{z=0} \qquad (٩,١٤)$$

وأن:

$$p_0 = P(0) = \frac{z_0 - z}{Kz_0} = \frac{1-(1/z_0)}{K}$$

يمكن توضيح أن العلاقة (٩,١٤) يمكن كتابتها في الصورة التالية (انظر تمرين (٩,١٢)):

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{1-(1/z_0)^{n+1}}{K}, & 0 \le n < K, \\ \dfrac{(1/z_0)^{n+1}(z_0^K - 1)}{K}, & n > K. \end{cases} \tag{٩,١٥}$$

بالإضافة إلى هذه النماذج التي ذكرناها، يوجد في الحقيقة العديد من النماذج الأخرى والتي تعتمد على عمليات لاولدة ولاوفاة، مثل نموذج $M^{[X]}/M^{[Y]}/1$، ونماذج إيرلنج $M/E_k/1$، $E_k/M/1$، $E_j/E_k/1$.

(٩,٥) تمارين

(٩,١) تصل السيارات إلى مركز خدمة لغسيل السيارات بشكل عشوائي بمعدل خمس سيارات في الساعة. ويتبع زمن غسيل السيارة توزيعاً أسياً بمتوسط 6 دقائق. أوجد:

١- متوسط عدد السيارات في المغسلة.

٢- نسبة السيارات التي تصل إلى المركز ويتم غسلها بدون تأخير.

٣- متوسط زمن انتظار أي سيارة قبل أن تبدأ في عملية الغسل.

(٩,٢) يمكن استخدام الدالة المولدة للاحتمال كطريقة بديلة لحل معادلات الموازنة لنظام صفوف الانتظار M/M/1. تأخذ معادلات الموازنة الصيغة التالية:

$$-\lambda p_0 + \mu p_1 = 0$$

$$\lambda p_0 - (\lambda+\mu)p_1 + \mu p_2 = 0$$

$$\lambda p_1 - (\lambda+\mu)p_2 + \mu p_3 = 0$$

$$\lambda p_2 - (\lambda+\mu)p_3 + \mu p_4 = 0$$

$$\vdots$$

بفرض أن $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n$، اضرب المعادلات السابقة على الترتيب في z^0، z^1، z^2، ... ثم اجمع الناتج.

١- اكتب المعادلة الناتجة.

٢- حل المعادلة الناتجة بالنسبة لـــ $P(z)$، وتحقق من أن الناتج هو:

$$P(z) = \frac{p_0}{1-\rho z}$$

٣- وضح كيفية الحصول على p_0.

٤- أوجد مفكوك $P(z)$ كمتسلسلة قوى، ثم وضح، كما أوجدنا في البند (٩,٣)، أن:

$$p_n = (1-\rho)\rho^n \,,\; n \geq 0$$

(٩,٣) استخدم الدالة المولدة للاحتمال لحساب تباين عدد الزبائن في نظام صفوف الانتظار M/M/1، في الحالة المستقرة.

(٩,٤) بفرض وصول البواخر عند ميناء بحري خلال قنوات بناء على عملية بواسون بمعدل 4 بواخر في الساعة. زمن مرور البواخر في الميناء يتبع التوزيع الأسي بمتوسط 10 دقائق.

١- ما هو متوسط زمن انتظار أي باخرة حتى تتمكن من البدء في عبور أحد القنوات؟

٢- ما هو احتمال انتظار أكثر من ثلاث بواخر؟

(٩,٥) لنفترض نظام صفوف الانتظار M/M/1/K.

١- استنتج مقاييس الأداء L، L_q، W، W_q.

٢- لنفترض التطبيق التالي: يحتوي أحد المستوصفات الطبية على غرفة انتظار بها 10 كراسي جلوس، ويفكر صاحب المستوصف في زيادة عدد الكراسي إلى 15. يصل المرضى إلى المستوصف بناء على عملية بواسون بمعدل $\lambda = 5$ ووقت فحص إي مريض يكون عبارة عن متغير عشوائي يتبع توزيعاً أسياً بالمتوسط $\mu = 6$. اعتماداً على زمن انتظار المريض في المستوصف، هل من الأفضل لصاحب المستوصف أن يزيد من عدد الكراسي في غرفة الانتظار؟

(٩,٦) يوجد اثنان من المفتشين لفحص عمل باقي العمال. يصل إنتاج العمال عشوائياً بمعدل 6 قطع من إنتاجهم في الساعة، ويستغرق فحص أي قطعه زمنًا عشوائياً يتبع التوزيع

الأسي بمتوسط 15 دقيقة.

١- أوجد نسب الزمن:

(أ) الذي يكون فيه كل من المفتشين معفياً من العمل.

(ب) الذي يكون فيه أحد المفشتسين معفياً من العمل.

٢- ما هو متوسط الوقت الذي يجب أن ينتظره أحد العمال حتى:

(أ) يتم فحص إنتاجه.

(ب) يتمكن من العودة إلى العمل.

(٩,٧) استنتج مقاييس الأداء L، L_q، W، W_q لنظام صفوف الانتظار M/M/c، ثم وضح أن $L-L_q=c\rho$.

(٩,٨) ينقسم عداد أحد مكاتب البريد إلى قطاعين، كل قطاع يحتوي على خادم واحد. يختص القطاع الأول بطوابع البريد، والطرود، ومعاشات التقاعد. والزبائن يصلون إلى هذا القطاع بشكل عشوائي بمعدل 18 زبوناً في المتوسط في الساعة. يختص القطاع الثاني بترتيب البطاقات البريدية، والتوفير، وتراخيص العمل. والزبائن يصلون إلى هذا القطاع بشكل عشوائي بمعدل 12 زبوناً في المتوسط في الساعة. زمن الخدمة في كل من القطاعين يتبع التوزيع الأسي بمتوسط دقيقتين.

١- قدر زمن انشغال عامل الخدمة في كل من القطاعين ومتوسط زمن انتظار أي زبون في صف الانتظار.

٢- إذا نُظم العمل بحيث إن كل عامل من العاملين القائمين بالخدمة يمكن أن يهتم بإتمام الخدمة بنوعيها، وأن الزبائن يذهبون من صف الانتظار العام إلى أول عامل ممكن (عندما يكون متاحاً)، قدر زمن انشغال كل عامل ومتوسط زمن انتظار أي زبون في صف الانتظار.

(٩,٩) تمتلك أحد خلايا نظام هاتف خلوي 50 محطة إذاعية لحمل مكالمات هاتفية. تصل المكالمات إلى هذا النظام بناء على عملية بواسون بمعدل $\lambda = 5$ في الدقيقة ومدة المكالمة عبارة عن متغير عشوائي يتبع توزيعاً أسياً بمتوسط دقيقة واحدة. ما هو

احتمال تعليق مكالمة؟

(٩,١٠) يقدم سوق ميجا عدداً كبيراً من محطات المراجعة للحصول على إمكانية الطلب الجيدة. يصل الزبائن إلى هذه المحطات بمعدل أربعة زبائن في الدقيقة، ويقضي أي زبون في عملية الخدمة زمنًا عشوائياً بمتوسط 1.5 من الدقائق.

١- ما هو متوسط عدد المحطات المشغولة عند أي لحظة؟

٢- ما هو احتمال انشغال أكثر من عشرة خطوط؟

(٩,١١) بالعودة إلى مثال (٩,٨)، ولكن بفرض أن الزبائن تصل في مجموعات مكونة من شخصين. ادرس الحالة التي يكون فيها أي مجموعة من الزبائن يمكن أن تحتوي على شخص واحد باحتمال p أو شخصين باحتمال $q=1-p$.

(٩,١٢) وضح كيفية الحصول على المعادلة (٩,١٥) من المعادلة (٩,١٤)، عندما K=2.

الفصـل العاشر

نـماذج الموثـوقيـة
Reliability Models

(١٠,١) مقدمة

تعد نظرية الموثوقية كمجموعة من الأفكار، أنظمة رياضية، وطرائق منفصلة تستخدم للحصول على حلول بعض مشاكل التنبؤ، والتقدير، واحتمالات أمثلية البقاء، ومتوسط زمن الحياة، أو بأكثر شمولية، توزيعات حياة عناصر الأنظمة. كما تهتم نظرية الموثوقية ببعض المشاكل الـتي تتعامل مع حساب احتمال العطاء الفعلي لبعض الأنظمة عند زمن معين أو عند زمن اختياري، أو بجزء من الزمن الذي تعمل خلاله بعض الأنظمة بكفاءة ودقة. في مجاميع كبيرة من حالات الموثوقية، يمكن إنجاز الصيانة maintenance، على سبيل المثال: عمليات الإحلال و الإصلاح أو الفحص، ومن ثم يمكن اتخاذ القرار المتعلق بعملية الصيانة اعتماداً على حل مشاكل الموثوقية. في هذا الفصل سنقدم بعض نماذج الموثوقية.

(١٠,٢) دالة الموثوقية
Reliability function

لنفرض أن إحدى الشركات تقدم ضماناً على منتجها لمدة عام. وحتى يوثق في هـذا الحكم يجب أن يكون احتمال عمل هذا المنتج كبيراً كما هو متوقع خلال فتـرة الـضمان. وكمقياس للموثوقية يمكن استخدام احتمال أن هذا المنتج لن يُخفق (يتعطل) خـلال هـذه الفترة. ليكن T يرمز إلى زمن حياة هذا المنتج، يمكن صياغة مقياس الموثوقية كالآتي:

$$R = P(T > 1\,\text{year})$$

ويعتبر هذا المقياس علامة مفيدة لقياس كيفية قيام هذا المنتج بالوظيفة المرجوة منه. وكمثال: إذا كان $R = 0.999$ فهذا يعني أنه يمكن أن تخفق وحدة واحدة من بين ألف وحدة خلال فترة مدتها عام.

سنهتم في هذا الفصل بحساب R للأنظمة البسيطة. وبدلاً من أن نفرض أن R تكون لمجرد وحدة، فإننا سنحصل على R كدالة في الزمن.

تعريف (١٠,١)

إذا كان T يرمز إلى زمن حياة نظام ما، فإن موثوقية هذا النظام عند اللحظة الزمنية t، والتي سنرمز لها بالرمز $R(t)$، تعرف بالعلاقة التالية:

$$R(t) = P(T > t)$$

تسمى الموثوقية عند اللحظة t، $R(t)$، بدالة الموثوقية وتكون عبارة عن احتمال أن الزمن الذي يمكن أن يتعطل عنده النظام يزيد عن t. يمكن التعبير عن دالة الموثوقية بدلالة دالة التوزيع التراكمية للمتغير العشوائي T كالآتي:

$$R(t) = 1 - P(T \le t) = 1 - F(t).$$

مثال (١٠,١)

لنفرض أن زمن حياة نظام ما يتبع التوزيع الأسي بالمتوسط $\mu = 1/\lambda$. ولأن دالة التوزيع التراكمية تأخذ الصورة $F(t) = 1 - \exp\{-\lambda t\}$، إذن دالة الموثوقية تصبح:

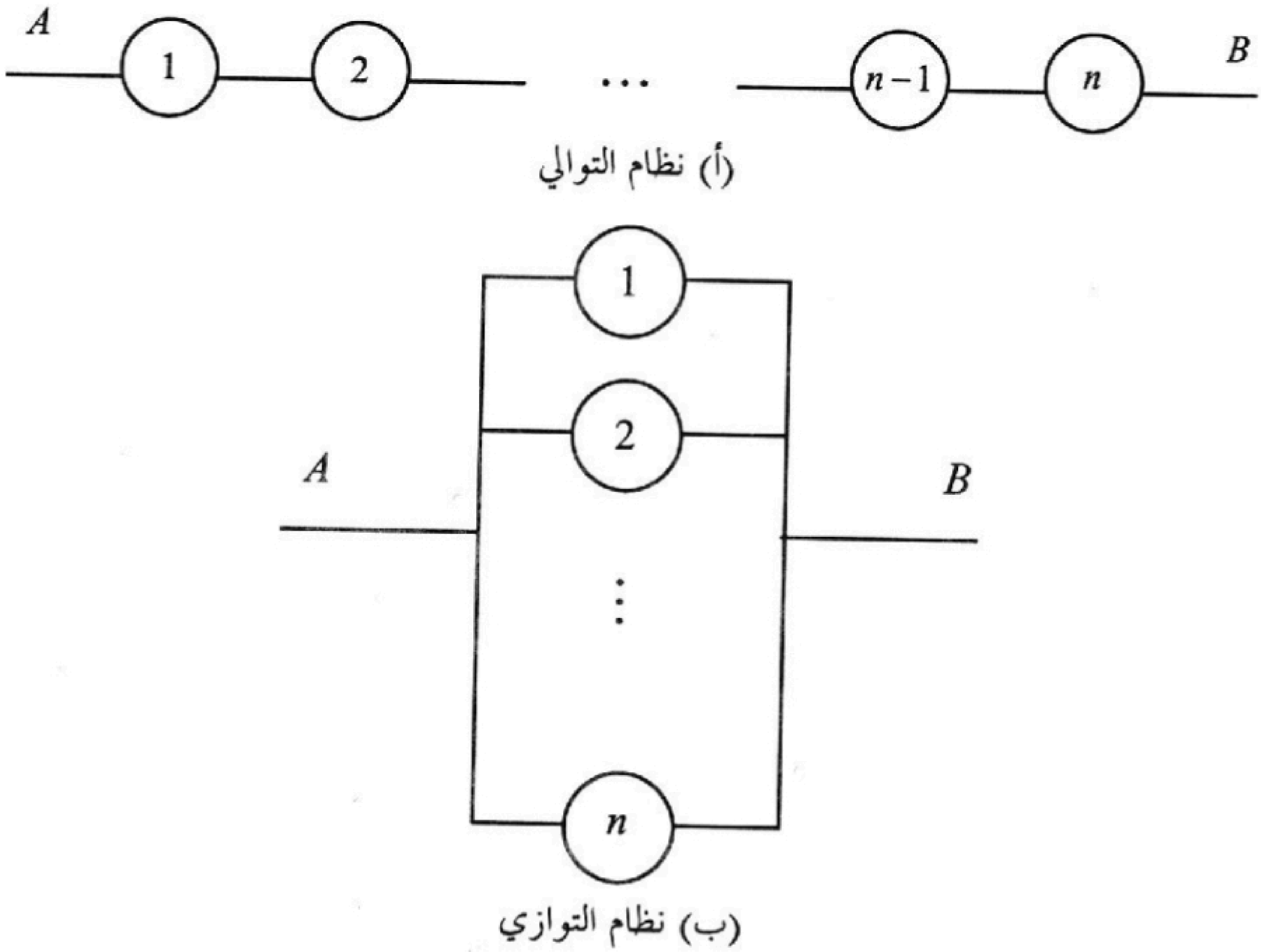
$$R(t) = \exp\{-\lambda t\}.$$

مثال (١٠,٢)

لنفرض أن زمن حياة نظام ما يتبع التوزيع الطبيعي، إذن دالة الموثوقية ليس لها صيغة رياضية بسيطة. ومن ثَم فإنه يمكن الحصول على موثوقية النظام باستخدام جدول التوزيع الطبيعي القياسي. فعلى سبيل المثال: لنفرض أن زمن حياة النظام يتبع التوزيع الطبيعي بالمتوسط 1000 ساعة وانحرافاً معيارياً 100 ساعة، ومن ثَم فإنه يمكن حساب موثوقية هذا النظام عندما $t = 850\,\text{hours}$ كالآتي:

$$\begin{aligned} R(850) &= P(T > 850) \\ &= P\left(\frac{T-1000}{100} > \frac{850-1000}{100}\right) \\ &= P(Z > -1.5) \\ &= 0.9332 \end{aligned}$$

من المواضيع الهامة في تطبيقات الموثوقية هي كيفية التعبير عن موثوقية الأنظمة بدلالة موثوقية عناصرها. سنبدأ بدراسة أنظمة التوالي وأنظمة التوازي الموضحة في الشكل (١٠,١). يمكن قراءة هذه الأنظمة كدوائر كهربائية يتدفق خلالها التيار من الموضع A إلى الموضع B. وسيتعطل هذا النظام إذا توقفت جميع التيارات من الموضع A إلى الموضع B. في أنظمة التوالي سيسبب عطل أحد العناصر في توقف المسار من A إلى B ، بينما في أنظمة التوازي يجب أن تتعطل جميع العناصر حتى يتوقف المسار من A إلى B.



شكل (١٠,١): أنظمة التوالي والتوازي.

نظرية (١٠,١)

لنفرض أن نظام توالٍ مكون من n من العناصر بدوال موثوقية $R_1(t), R_2(t), \cdots, R_n(t)$ ولنفرض أن هذه العناصر مستقلة عن بعضها. إذن دالة موثوقية نظام التوالي هي:

$$R_S(t) = \prod_{i=1}^{n} R_i(t)$$

دالة موثوقية نظام التوازي هي:

$$R_P(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} \left[1 - R_i(t)\right]$$

البرهان

تعتبر هذه النتائج تطبيقات للنظرية المعروفة والتي تقدم توزيع أصغر وأكبر متغير عشوائي لمتتابعة من المتغيرات العشوائية. ولتوضيح ذلك، نفرض أن T يرمز إلى زمن حياة النظام، بينما T_i يرمز إلى زمن حياة العنصر رقم i، $(i = 1,2,\cdots,n)$. سيخفق نظام التوالي بعد الزمن t إذا وفقط إذا أخفقت جميع عناصره بعد نفس اللحظة t، ويحدث ذلك إذا وفقط إذا كان زمن العنصر ذو زمن الحياة الأقل سيخفق بعد اللحظة t. ليكن t يرمز إلى دالة التوزيع التراكمية للمتغير العشوائي T_i، ومن ثَم فإن:

$$\begin{aligned} R_S(t) &= P(T > t) \\ &= P\left(\min\{T_1, T_2, \cdots, T_n\} > t\right) \\ &= P\left(T_1 > t, T_2 > t, \cdots, T_n > t\right) \end{aligned}$$

ومن الاستقلال:

$$\begin{aligned} R_S(t) &= \prod_{i=1}^{n} P\left(T_i > t\right) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \left[1 - F_i(t)\right] \\ &= \prod_{i=1}^{n} R_i(t) \end{aligned}$$

ولنظام التوازي، يكون من السهل حساب $P(T \le t) = 1 - R_P(t)$ من حساب $R_P(t)$ مباشرة. حيث إن نظام التوازي سيخفق إذا وفقط إذا أخفقت جميع عناصره، وهذا يقود إلى أن $T \le t$ تكافئ $\max\{T_1, T_2, \cdots, T_n\} \le t$ ، ومن ثَم فإن:

$$\begin{aligned} 1 - R_P(t) &= P(T \le t) \\ &= P(\max\{T_1, T_2, \cdots, T_n\} \le t) \\ &= P(T_1 \le t, T_2 \le t, \cdots, T_n \le t) \end{aligned}$$

ومن الاستقلال:

$$\begin{aligned} 1 - R_P(t) &= P(T_1 \le t) P(T_2 \le t) \cdots P(T_n \le t) \\ &= \prod_{i=1}^{n} P(T_i \le t) \\ &= \prod_{i=1}^{n} F_i(t) \\ &= \prod_{i=1}^{n} [1 - R_i(t)] \end{aligned}$$

وهذا يكمل برهان النظرية.

لاحظ أن خاصية استقلال عناصر النظام في النظرية السابقة يكون عبارة عن شرط ضروري لصحة النتائج المقدمة فيها. ولكن لاتتمتع جميع الأنظمة بهذه الخاصية، فعلى سبيل المثال، نفرض وجود مصدر ما يتسبب في إخفاق أحد عناصر النظام، ليكن مثلاً صدمة كهربية مدمرة، ومن ثَم فإنه في هذه الحالة لاتصبح النتائج السابقة صحيحة.

مثال (١٠,٣)

لنفرض أن ثلاثة عناصر تتبع أزمنة حياتها توزيعاً أسياً بالمتوسطات، بآلاف الساعات، $\mu_1 = 2.0$ ، $\mu_2 = 2.5$ ، $\mu_3 = 4.0$ على الترتيب. دوال موثوقية العناصر تأخذ الصيغ التالية $R_1(t) = \exp\{-0.5t\}$ ، $R_2(t) = \exp\{-0.4t\}$ ، $R_3(t) = \exp\{-0.25t\}$ ، على الترتيب. لنفرض أن هذه العناصر مستقلة عن بعضها، إذن دالتا موثوقية نظامي التوالي والتوازي المكونين من هذه العناصر هما:

$$R_S(t) = \exp\{-1.15t\}$$
$$R_P(t) = 1 - \left(1 - e^{-0.5t}\right)\left(1 - e^{-0.4t}\right)\left(1 - e^{-0.25t}\right)$$

ومن ثَم فإن احتمال أن يدوم نظام التوالي أكثر من 1000 ساعة هو $R_S(1) = 0.32$ ، واحتمال أن يدوم نظام التوازي أكثر من 1000 ساعة هو $R_P(1) = 0.97$.

يوجد العديد من الأنظمة المكونة من أنظمة توالٍ وتوازٍ جزئية. ويمكن الحصول على موثوقية مثل هذه الأنظمة بتكرار استخدام نتائج النظرية (١٠,١).

مثال (١٠,٤)

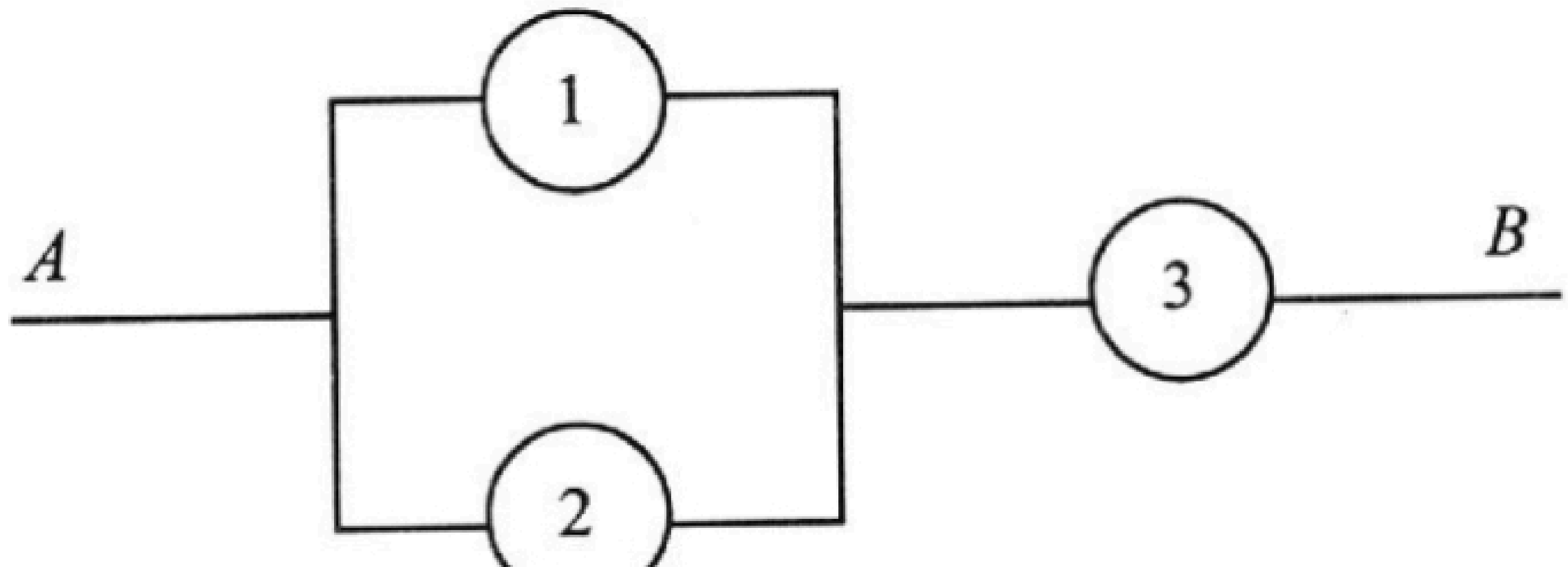
لنفرض أن العناصر الثلاثة المُقدمة في مثال (١٠,٣) تم توصيلها في نظام كالموضح بالشكل (١٠,٢). يُكون العنصرين 1، و2 نظام توازٍ جزئي يتصل على التوالي مع العنصر 3. دالة موثوقية النظام الجزئي المُكون من العنصرين 1، و2 هي:

$$R_{12}(t) = 1 - \left(1 - e^{-0.5t}\right)\left(1 - e^{-0.4t}\right)$$

ومن ثَم فإن دالة موثوقية النظام تُعطى بالعلاقة التالية:

$$\begin{aligned} R(t) &= R_3(t)\,R_{12}(t) \\ &= e^{-0.25t}\left[1 - \left(1 - e^{-0.5t}\right)\left(1 - e^{-0.4t}\right)\right] \end{aligned}$$

ومن ثم فإن احتمال أن يدوم هذا النظام أكثر من 1000 ساعة هو $R(1) = 0.68$.



شكل (١٠,٢): نظام مكون من أنظمة توالٍ وتوازٍ جزئية.

مثال (١٠,٥)

لنفرض أن نظاماً مكوناً من ستة عناصر متصلة كما هو موضح بالشكل (١٠,٣).

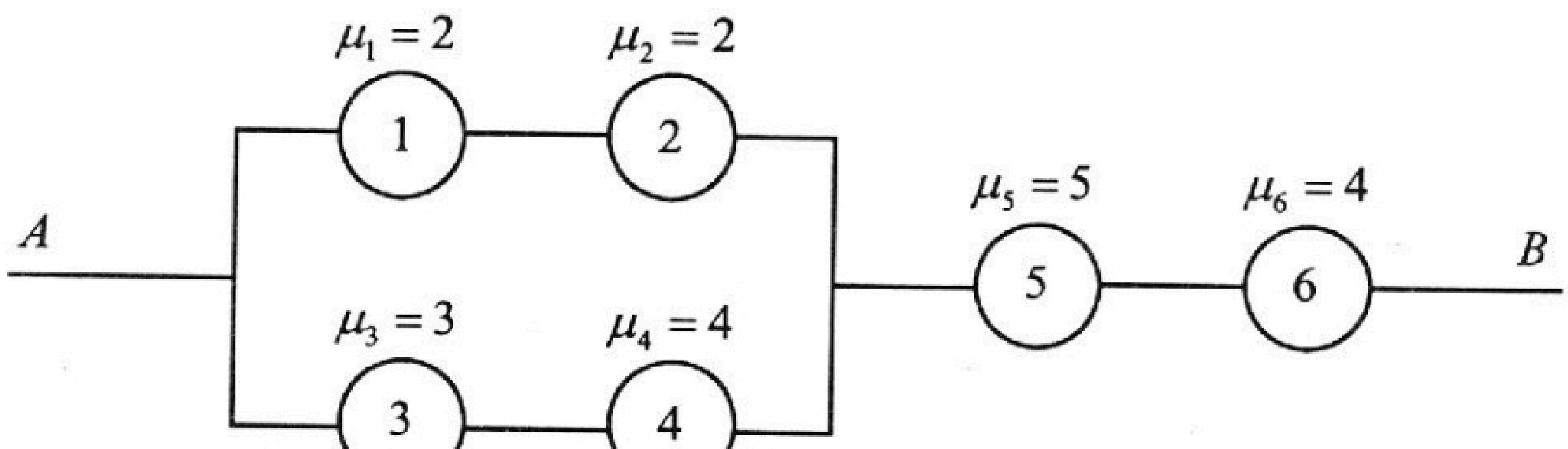
وأزمنة حياتها تتبع توزيعات أسية بالمتوسطات، مقاسة بآلاف الساعات، μ_i ، $(\mu_2 = 1,2,\cdots,6)$ ، كما هو موضح أيضًا بالشكل السابق. من الملاحظ أن العنصرين 1، و2 يكونان نظام توالٍ جزئي بدالة الموثوقية $R_{12}(t) = R_1(t)\,R_2(t) = \exp\{-t\}$ ، وبالمثل العنصرين 3، و4 يكونان نظام توالٍ جزئي بدالة الموثوقية $R_{34}(t) = R_3(t)\,R_4(t) = \exp\{-7t/12\}$. حيث إن النظام الجزئي المكون من العنصرين 1، و2 يُكون مع النظام الجزئي المكون من العنصرين 3، و4 نظامًا جزئياً آخر عبارة عن نظام توازٍ فرعه الأول النظام الجزئي 1، و2 وفرعه الثاني النظام الجزئي 3، و4، ومن ثَم فإن دالة موثوقيته هي:

$$R_{1234}(t) = 1 - \left[1 - R_{12}(t)\right]\left[1 - R_{34}(t)\right]$$

وأخيرًا هذه العناصر الأربعة تُكون نظاماً جزئياً يتصل على التوالي مع العنصرين 5، و6، ومن ثَم فإن دالة موثوقية النظام تُعطى في الصورة التالية:

$$\begin{aligned} R(t) &= R_{1234}(t)\,R_5(t)\,R_6(t) \\ &= \left\{1 - \left(1 - e^{-t}\right)\left(1 - e^{-7t/12}\right)\right\} e^{-9t/20} \end{aligned}$$

لنفرض أننا نريد حساب احتمال أن هذا النظام سيعيش على الأقل ألفي ساعة، إذن نحسب $R(2.0)$ لنحصل على $R(2.0) = 0.164$.



شكل (١٠,٣): النظام المدروس في المثال (١٠,٥).

(١٠,٣) معدل المخاطرة

Hazard rate

قدمنا في البند (١٠,٢) تعريف دالة الموثوقية وبينا كيفية حسابها للعديد من الأنظمة

البسيطة. تعتبر دالة المخاطرة واحدة من الدوال الأخرى المفيدة لوصف موثوقية نظام ما، والتي يطلق عليها أيضًا دالة الإخفاق failure function أو دالة الشدة intensity function أو قوة الفناء mortality force.

تعريف (١٠,٢)

ليكن T يرمز إلى زمن حياة نظام ما، وبفرض أن $f(t)$ دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي T، وأن $R(t)$ هي دالة الموثوقية. تُعرف دالة الإخفاق لهذا النظام بالعلاقة التالية:

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)}$$

يمكن تفسير الدالة $h(t)$ كالآتي: احتمال الإخفاق خلال فترة زمنية قصيرة، من اللحظة t إلى اللحظة $t + \Delta t$، بشرط أن النظام قد عمر حتى اللحظة t، ويعطى بالعلاقة التالية:

$$\begin{aligned} P\left(t < T < t + \Delta t \middle| T > t\right) &= \frac{P\left(T < t + \Delta t, T > t\right)}{P\left(T > t\right)} \\ &= \frac{\int^{t+\Delta t} f(u)\,du}{R(t)} \\ &\approx h(t)\,\Delta t \end{aligned}$$

ومن ثَم فإن $h(t)\,\Delta t$ يكون عبارة عن تقريب لاحتمال إخفاق النظام في الفترة الزمنية $\left(t, t + \Delta t\right)$، بشرط أن النظام قد عمر حتى اللحظة t. تعتبر الدالة $h(t)$ كمقياس لمخاطرة الإخفاق عند اللحظة t بشرط أن البقاء حتى اللحظة t.

إذا كانت الدالة $h(t)$ تزايدية مع الزمن، فإن النظام يبلى (يُنهك) مع الزمن. فعلى سبيل المثال، نفرض أن احتمال الإخفاق مباشرة بعد 1000 ساعة، بشرط أنه قد دام لمدة 1000 ساعة، يكون أكبر من احتمال الإخفاق مباشرة بعد 500 ساعة بشرط أنه قد دام لمدة 500 ساعة. يجب ألاَّ نتفاجأ عندما نواجه العديد من الأنظمة التي تُظهر خاصية الإنهاك هذه wear-out property. أما إذا كانت الدالة $h(t)$ تناقصية مع الزمن، فإن موثوقية النظام ستتحسن مع

الزمن. تُظهر بعض الأنظمة معدل إخفاق متناقص مع الزمن في مرحلة عمرها الابتدائي. تُسمى الفترة الزمنية التي تتحسن فيها موثوقية النظام بدورة الإضاءة burn-in.

مثال (١٠,٦)

إذا كان زمن حياة نظام ما يتبع توزيعاً أسياً بالمتوسط $\mu = 1/\lambda$ ، إذن دالة إخفاقه تكون عبارة عن كمية ثابتة، بمعنى أن:

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{f(t)}{R(t)} \\ &= \frac{\lambda \exp\{-\lambda t\}}{\exp\{-\lambda t\}} = \lambda \end{aligned}$$

لايحقق التوزيع الأسي أياً من خاصيتي الإنهاك أو الإضاءة. وعدم تحقيق التوزيع الأسي لخاصية الإنهاك تجعله يُستخدم كنموذج معقول ظاهرياً لدراسة الأنظمة التي إخفاقاتها تكون بسبب عوامل عشوائية تنشأ من خارج النظام نفسه. وكمثال يمكن اختيار التوزيع الأسي لتمثيل زمن حياة نظام إلكتروني إذا كان إخفاقه ينتج من زيادة شدة التيار الكهربي المفاجئ أو نتيجة أي مصدر فجائي مدمر. وتُشبه خاصية عدم الإنهاك للتوزيع الأسي خاصية فقدان الذاكرة التي قدمناها في البند (٧,٤). الأنظمة التي أزمنة حياتها تتبع التوزيع الأسي لاتتذكر طول فترة عملها.

مثال (١٠,٧)

يمكن لدالة الإخفاق لمتغير عشوائي يتبع توزيع وايبل Weibull distribution، بدالة الكثافة الاحتمالية $f(t) = (\beta/\alpha)(t/\alpha)^{\beta-1} \exp\{-(t/\alpha)^{\beta}\}$ ، $\alpha, \beta > 0$ ،أن تكون تزايدية مع الزمن عندما $1 < \beta$ ، أو تناقصية مع الزمن عندما $1 > \beta$ ، أو ثابتة مع الزمن عندما $\beta = 1$. وذلك لأن:

$$h(t) = \frac{(\beta/\alpha)(t/\alpha)^{\beta-1} \exp\{-(t/\alpha)^{\beta}\}}{\exp\{-(t/\alpha)^{\beta}\}}$$

$$=\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta-1}$$

تعتبر مرونة توزيع وايبل في احتوائه على معدل إخفاق متزايد أو متناقص أو ثابت مع الزمن واحدة من الملامح الهامة التي تجعله نموذجاً جذاباً لتمثيل أزمنة حياة بعض الأنظمة.

مثال (١٠,٨)

لنفرض أن نظاماً مكوناً من تواز مكون من عنصرين متطابقين ومستقلين عن بعضهما، وزمن حياة كل منهما يتبع توزيعاً أسياً بالمتوسط $1/2$ وحدة زمنية. ومن ثَم فإن دالة موثوقية العناصر هي $R_1(t) = R_2(t) = e^{-2t}$. باستخدام النظرية (١٠,١) فإنه يمكن الحصول على دالة موثوقية النظام كالآتي:

$$\begin{aligned} R_P(t) &= 1-\left(1-e^{-2t}\right)\left(1-e^{-2t}\right) \\ &= 2e^{-2t}-e^{-4t}\,,\ t>0 \end{aligned}$$

ومن ثَم فإن دالة التوزيع التراكمية تعطى في الصورة التالية:

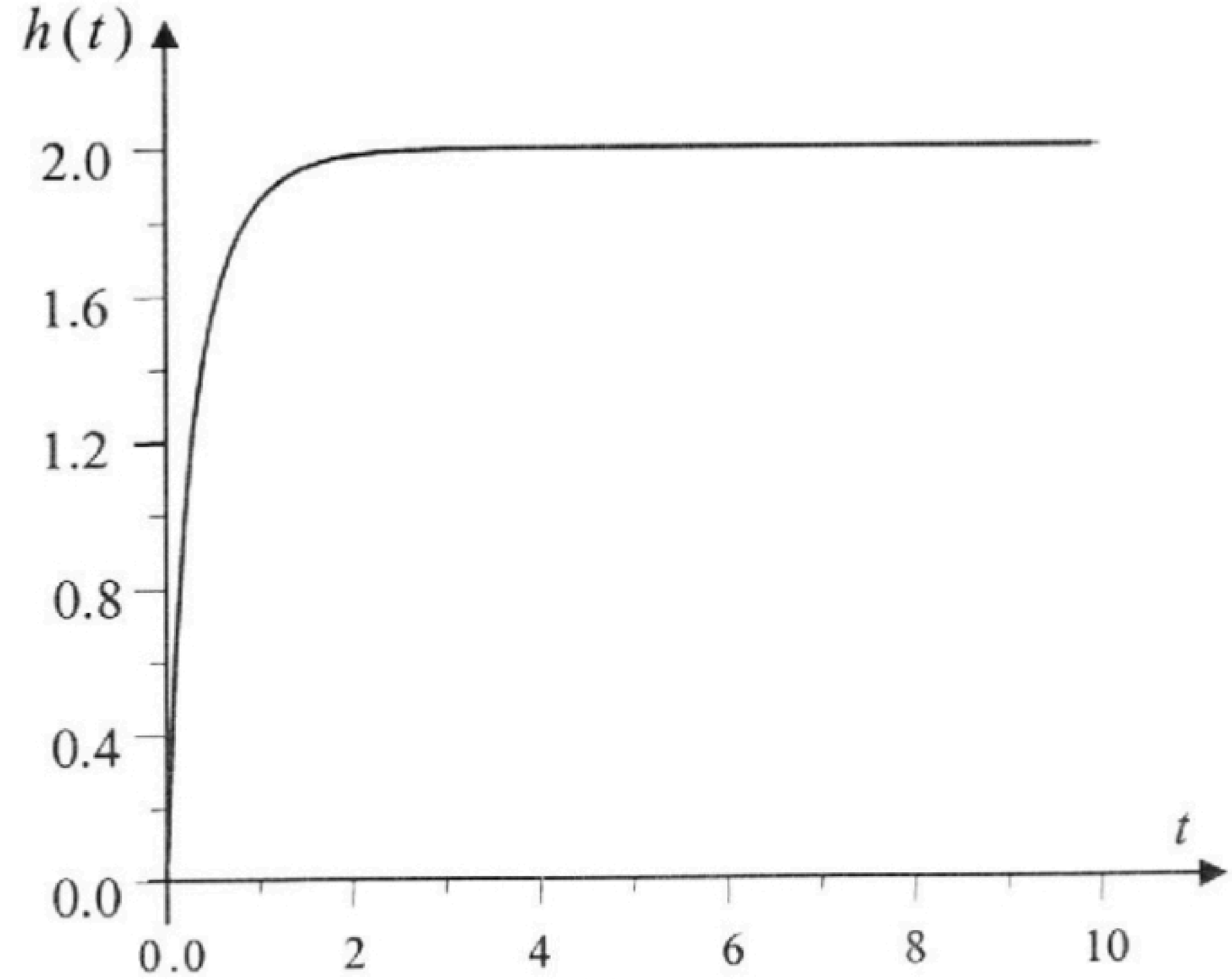
$$\begin{aligned} F(t) &= 1-R_P(t) \\ &= 1-2e^{-2t}+e^{-4t}\,,\ t>0 \end{aligned}$$

ودالة الكثافة الاحتمالية:

$$f(t) = 4e^{-2t}-4e^{-4t}\,,\ t>0$$

ومن ثم فإن دالة الإخفاق تكون:

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{4e^{-2t}-4e^{-4t}}{2e^{-2t}-e^{-4t}}.$$

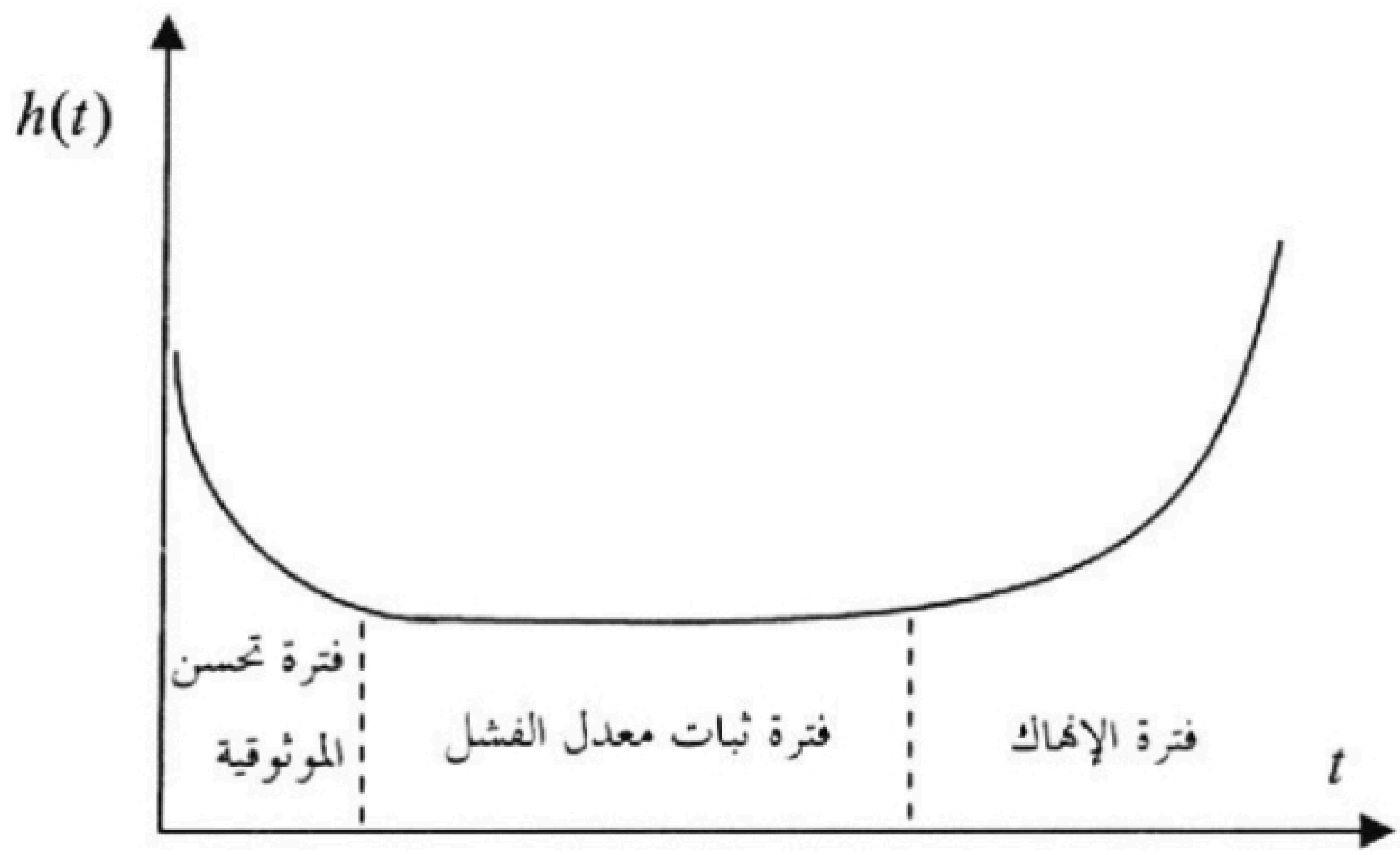


شكل (٤ ,١٠): دالة إخفاق نظام توازٍ مكون من عنصرين بمعدلي إخفاق ثابتين.

يوضح الشكل (٤ ,١٠) رسماً بيانياً لدالة الإخفاق السابقة. ومن الشكل يتضح أن الدالة بدأت عند نقطة الأصل ثم تزايدت مع الزمن حتى وصلت إلى القيمة 2 ثم بدأت في الثبات عند القيمة 2، وهذا يعني أن النظام أظهر خاصية الإنهاك، بالرغم من أن عناصره لا تحقق هذه الخاصية. وعلاوة على ذلك، فإن دالة الإخفاق في اللانهاية، عندما $t \to \infty$، تكون عبارة عن دالة إخفاق أحد العناصر أي تساوي القيمة الثابتة 2، وتعتبر هذه النتيجة منطقية؛ وذلك لأن معدل إخفاق النظام يكون عبارة عن أقل معدل إخفاق من بين معدلي إخفاق عنصريه، ومع مرور العمر وإخفاق أحد عناصر النظام فإن النظام سيستمر في العمل كنظام مكون من عنصر واحد.

يوجد بعض الأنظمة التي يكون معدل إخفاقها متناقص مع الزمن في أول العمر، ثم يثبت نسبيًا مع الزمن، ثم بعد ذلك يتزايد مع الزمن. فعلى سبيل المثال، يمكن أن تحتوي أحد السيارات على عيب في الصناعة والذي يجب أن يتم إصلاحه، وعملية الإصلاح تتسبب في تحسين موثوقية هذه السيارة إلى أن يتم الإصلاح، ثم بعد إتمام عملية الإصلاح ولبعض الوقت يثبت معدل إخفاق السيارة إلى أن يتقدم بها العمر وكنتيجة طبيعية للاستخدام فإن معدل

إخفاق السيارة يبدأ في التزايد مع الزمن وتبدأ السيارة في مرحلة الإنهاك. مثل هذا النوع من معدلات الإخفاق يمكن وصفه بشكل حوض الاستحمام كما يوضحه الشكل (١٠,٥). ويعتبر زمن حياة الإنسان مثالاً آخر لمثل هذا النوع من دوال الإخفاق، فطور معدل الإخفاق التناقصي مع الزمن يمثل الفترة من بعد الولادة مباشرة حتى بداية الطفولة، وطور معدل الإخفاق الثابت يُمثل الفترة من بداية الطفولة حتى متوسط العمر، ومرحلة تزايد معدل الفشل مع الزمن يُمثل فترة تقدم العمر أو الشيخوخة. وفي الحقيقة توجد علاقة هامة بين دالتي معدل الإخفاق والموثوقية كما توضحه النظرية التالية:



شكل (١٠,٥): شكل حوض الاستحمام لدالة معدل الاخفاق.

نظرية (١٠,٢)

ليكن T عبارة عن متغير عشوائي حقيقي غير سالب، دالة معدل إخفاقه $h(t)$، ودالة موثوقيته $R(t)$، إذن:

$$R(t) = \exp\left\{- \int_0^t h(u)\, du\right\}$$

البرهان

لإثبات هذه النتيجة، نلاحظ أولاً أن $\frac{d}{dt}R(t) = f(t)$

ومن ثَم فإن:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\ln R(t) &= \frac{1}{R(t)}\frac{d}{dt}R(t)\\ &= \frac{-f(t)}{R(t)}\\ &= -h(t).\end{aligned}$$

أي أن:

$$d\ln R(t) = -h(t)\,dt$$

وبتكامل طرفي العلاقة السابقة، نحصل على:

$$\ln R(t) - \ln R(0) = -\int_0^t h(u)\,du$$

وحيث إن $R(0) = 1$ ، إذن $\ln R(0) = 0$ ، إذن:

$$\ln R(t) = -\int_0^t h(u)\,du$$

ومن ثَم نحصل على النتيجة المطلوبة ويكتمل البرهان.

مما سبق يتضح أنه باستخدام دالة الإخفاق $h(t)$ يمكن الحصول على دالة الموثوقية $R(t)$ والتي يمكن باستخدامها الحصول على كل من دالة التوزيع التراكمية $F(t)$ ودالة الكثافة الاحتمالية $f(t)$ كما يلي:

$$\begin{aligned}F(t) &= 1 - R(t)\\ &= 1 - \exp\left\{-\int_0^t h(u)\,du\right\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(t) &= \frac{d}{dt}R(t)\\ &= h(t)\,\exp\left\{-\int_0^t h(u)\,du\right\}\end{aligned}$$

أو:

$$f(t) = h(t)\,R(t).$$

مثال (١٠,٩)

لنفرض أن دالة الإخفاق تُعطى بالعلاقة التالية (تسمى هذه الدالة بدالة الإخفاق الأسية):

$$h(t) = \exp\{t\}, t > 0$$

أوجد كلاً من دالة الموثوقية، ودالة التوزيع التراكمية، ودالة الكثافة الاحتمالية.

الحل

نوجد أولاً التكامل التالي $\int_0^t h(u)\,du$

$$\int_0^t h(u)\,du = \int_0^t \exp\{u\}\ du$$
$$= \exp\{u\}\Big|_0^t = \exp\{t\} - 1$$

إذن باستخدام نتيجة النظرية (١٠,٢) فإن:

$$R(t) = \exp\{-(e^t - 1)\},\ t > 0$$

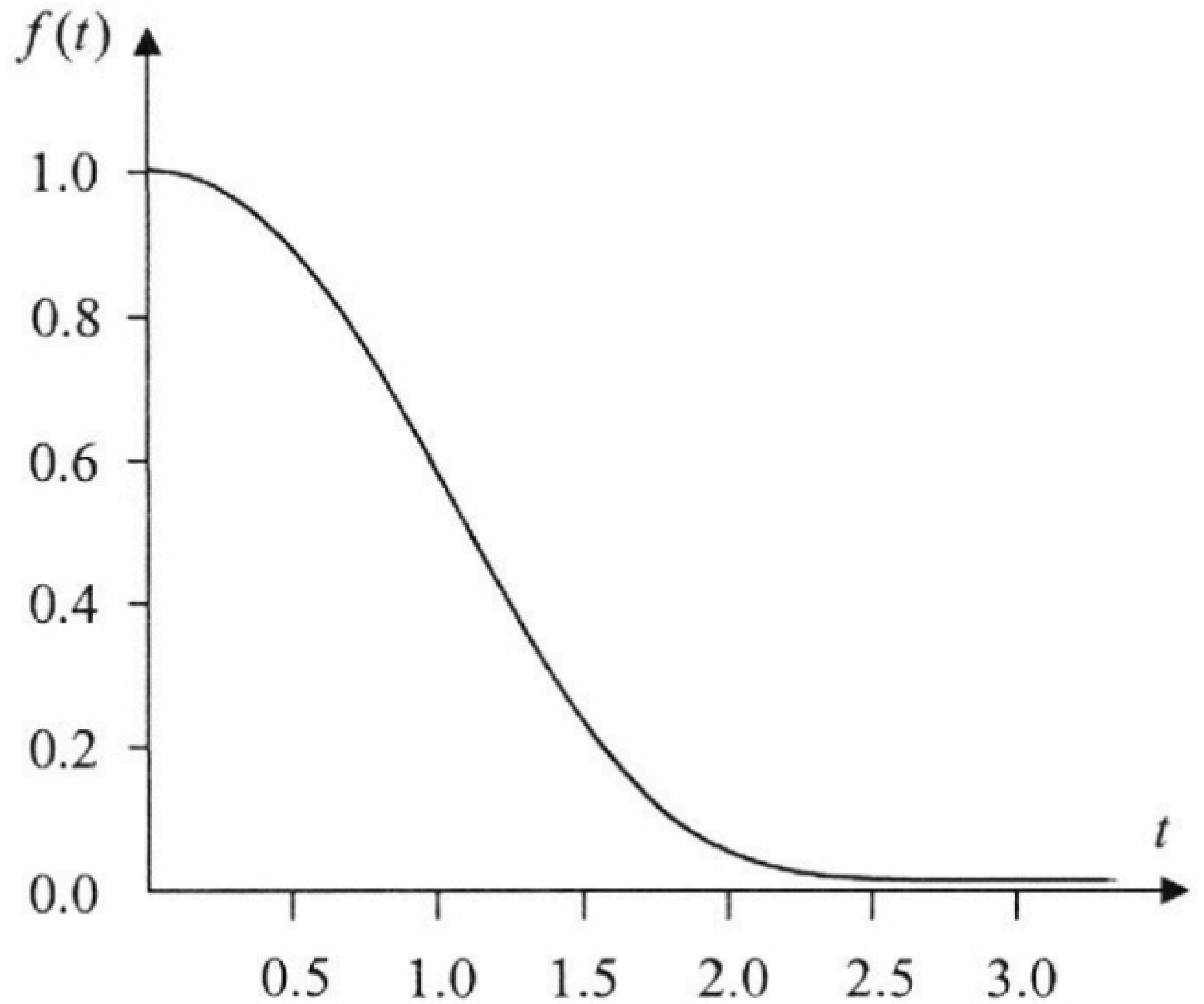
ومن ثَم فإن دالة التوزيع التراكمية تكون:

$$F(t) = 1 - \exp\{-(e^t - 1)\},\ t > 0$$

وتكون دالة الكثافة الاحتمالية:

$$f(t) = e^t \exp\{-(e^t - 1)\},\ t > 0$$

يوضح الشكل (١٠,٦) رسماً بيانياً للدالة $f(t)$.



شكل (١٠,٦): الرسم البياني لدالة الكثافة الاحتمالية لدالة الإخفاق الأسية.

(١٠,٤) عمليات التجديد
Renewal processes

تعتبر عملية بواسون كعملية عد counting process تكون فيها الأزمنة بين العد عبارة عن متغيرات عشوائية مستقلة ومتطابقة وتتبع التوزيع الأسي. في هذا البند سنعمم عملية بواسون بالسماح للأزمنة بين العد حتى تتبع توزيعًا يمكن أن يختلف عن التوزيع الأسي.

تعريف (١٠,٣)

تعرف عملية التجديد على أنها عملية عد تكون فيها الأزمنة بين العد عبارة عن متغيرات عشوائية مستقلة ومتطابقة ولها توزيع اختياري.

يأتي اسم التجديد من التطبيقات النموذجية لمثل هذه العمليات. فعلى سبيل المثال، لنفرض أننا نستبدل مصباحاً كهربياً في جهاز ما بمصباح كهربي جديد مطابق للمصباح الأصلي بمجرد أن يحترق ذلك المصباح، ولنفرض أن حدوث هذه العملية مراراً كلما احترق المصباح الجديد. من المعقول أن نفترض أن الأزمنة بين عمليات الاستبدال تكون عبارة عن متغيرات عشوائية مستقلة ومتطابقة. ويمكن أن تتبع هذه المتغيرات العشوائية التوزيع الأسي أو توزيع وايبل أو أي توزيع احتمالي متصل آخر. وحيث إن الجهاز يتم تجديده كل مرة يتم فيها استبدال المصباح المحترق بآخر جديد، فإن هذه العملية تسمى بعملية تجديد.

ومن وجهة نظر الموثوقية تسمى النتائج المراد عدها بالتجديدات، والأزمنة بين العد تسمى أزمنة التجديد renewal times. ويرمز لأزمنة التجديد بالرموز التالية T_1، T_2، ... بالمتوسط $\mu = E[T_i]$ والانحراف المعياري $\sigma = \sqrt{\operatorname{var}[T_i]}$. ويرمز لعدد التجديدات في الفترة $[0,t]$ بالرمز $N(t)$.

مثال (١٠,١٠)

يتم إنهاك نظام ميكانيكي وكهربي بسبب تأثير الصدمات التراكمية التي يتعرض لها هذا النظام مع الزمن. نفترض أن النظام يحقق الفرضيات الثلاث التالية: تحدث الصدمات بناء على عملية بواسون بالمعدل λ، يُخفق النظام بمجرد أن يتلقى الصدمة رقم k، يستعيد النظام

عافيته (يجدد) بمجرد أن يتعطل. نرغب في استنتاج توزيع المتغير العشوائي $N(t)$، وعدد التجديدات في فترة زمنية طولها t. والآن، لن يحدث تجديد إذا كان عدد الصدمات التي يتعرض لها النظام يتراوح ما بين الصفر وبين العدد $k-1$، يحدث تجديد واحد إذا تراوحت عدد الصدمات بين k و $2k-1$، وهكذا. ومن ثَم فإن:

$$P\{N(t)=n\}=P\{nk \leq \text{عدد الصدمات} \leq (n+1)k-1\}$$
$$=\sum_{j=nk}^{(n+1)k-1} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^j}{j!}.$$

لنفرض أن $\lambda = 0.5$، وأن النظام سيخفق عندما يتلقى ثلاث صدمات متتالية، إذن احتمال حدوث تجديد واحد عندما $t = 4$ من الوحدات الزمنية يُعطى بالعلاقة التالية:

$$P(N(4)=1)=\sum_{j=3}^{5} e^{-2}\frac{2^j}{j!}=0.3067$$

توجد علاقة في غاية الأهمية تربط بين توزيع زمن التجديد وتوزيع عدد التجديدات، كما توضحه النظرية التالية.

نظرية (١٠,٣)

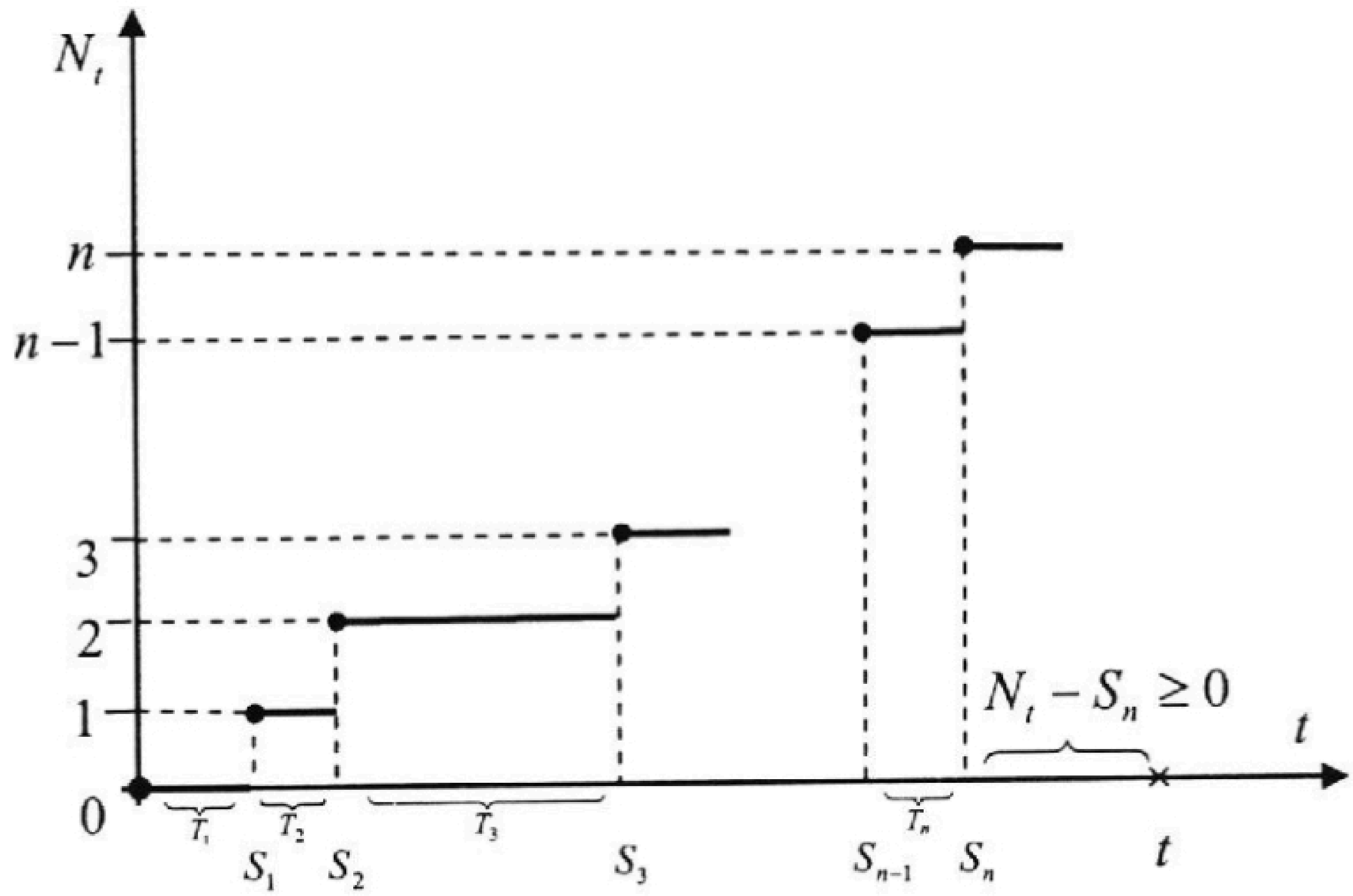
ليكن $S_n = T_1 + T_2 + \cdots + T_n$ ، حيث إن T_i يرمز إلى الزمن بين التجديد رقم $i-1$ والتجديد رقم i ، $i = 1,2,\cdots,n$. و $N(t)$ يرمز إلى عدد التجديدات خلال فترة طولها t. إذن:

$$P\{S_n \leq t)\}=P\{N(t)\geq n\}$$

البرهان

للتحقق من صحة العلاقة السابقة، يجب أن نلاحظ أولاً أن المتغير العشوائي S_n يكون عبارة عن الزمن الذي يحدث عنده n من التجديدات. ومن ثم فإن الحدث $S_n \leq t$ يعني حدوث على الأقل n من التجديدات في الفترة $[0,t]$، وذلك لأنه يمكن تقسيم الفترة $[0,t]$ إلى فترتين متنافيتين $[0,t]=[0,S_n]\cup(S_n,t]$، حيث إنه يحدث n من التجديدات في الفترة

$[0,S_n]$، كما يمكن حدوث على الأقل تجديد واحد في الفترة $(S_n,t]$، انظر الشكل (٧، ١٠). أي أن الحادثة $S_n \le t$ تكافئ الحادثة $N(t) \ge n$، ومن ثَم فإن لهما نفس التوزيع، وهذا يُكمل البرهان.



شكل (١٠,٧): علاقة $S_n \le t$ بـ $N(t) \ge n$.

(١٠,٥) الأنظمة القابلة للصيانة

Maintained systems

سنقدم في هذا البند بعض الأنظمة القابلة للإصلاح، بمعنى أنه بمجرد أن يتعطل النظام فإنه يمكن إصلاحه. سنبدأ بفرض نظام ما، والذي يمكن وصفه بأنه إما أن يكون عاملاً أو عاطلاً عن العمل. كما يُفترض أن النظام يدور بين الحالتين عامل وعاطل. وعندما يتعطل النظام، فإنه يتم إصلاحه ويعود كما كان وكأنه جهاز جديد، ويستمر في العمل حتى يتعطل، ثم يتم إصلاحه، وبعد الإصلاح يعود من جديد كجهاز جديد، وهكذا يدور النظام بين هاتين الحالتين. ليكن $T_U(i)$، $T_D(i)$ متغيرين عشوائيين يمثلان زمني العمل والعطل (الإصلاح) على الترتيب للنظام خلال الدورة رقم i، $(i=1,2,\cdots)$. ولنفرض، خلال دورات النظام،

أن الأزمنة $T_U(1)$ ، $T_U(2)$ ، ... تكون مستقلة ومتطابقة ولها نفس التوزيع، وأن $T_D(1)$ ، $T_D(2)$ ، ... تكون أيضًا مستقلة ومتطابقة ولها نفس التوزيع.

نظرية (١٠,٤)

ليكن $E[T_U(i)] = \mu_U$ ، $E[T_D(i)] = \mu_D$ ، إذن

$$\lim_{t\to\infty} P\{\text{عمل النظام عند اللحظة } t\} = \frac{\mu_U}{\mu_U + \mu_D}$$

البرهان

في الحقيقة هذه النتيجة تكون نتيجة منطقية جداً، وذلك لأن متوسط زمن دوران النظام بين حالتي العمل والعطل هو $\mu_U + \mu_D$ ، ومتوسط زمن عمل الجهاز هو μ_U . ومن ثم فإنه بعد مرور زمن كبير جداً فإن نسبة عمل النظام تُعطى بالعلاقة $\mu_U/(\mu_U + \mu_D)$. وبالمثل فإن نسبة تعطل الجهاز بعد مرور فترة زمنية كبيرة هي $\mu_D/(\mu_U + \mu_D)$.

مثال (١٠,١١)

لنفرض أن زمن عمل ماكينة بالساعات، لتقديم زجاجات عصير، يتبع توزيع وايبل، بدالة الكثافة الاحتمالية المعروضة في المثال (١٠,٧)، بالمعلمتين $\alpha = 150$ ، $\beta = 1.6$. وزمن إصلاح الماكينة يتبع توزيع وايبل بالمعلمتين $\alpha = 8$ ، $\beta = 1.2$. ويمكن التحقق من أن متوسط وتباين توزيع وايبل بالمعلمتين α ، β ، على الترتيب، هما:

$$\mu = \alpha\,\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$$

$$\sigma^2 = \alpha^2 \left\{\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)\right]^2\right\}$$

حيث إن $\Gamma(x)$ يرمز إلى دالة جاما. باستخدام هاتين العلاقتين نحصل على النتائج المعروضة في جدول (١٠,١).

جدول (١٠,١): قيم $\Gamma(1+1/\beta)$ لبعض قيم المعلمة β .

β	$\Gamma(1+1/\beta)$	β	$\Gamma(1+1/\beta)$
0.2	120.0	2.2	0.886
0.4	3.323	2.4	0.886
0.6	1.505	2.6	0.888
0.8	1.133	2.8	0.890
1.0	1.000	3.0	0.893
1.2	0.940	3.2	0.896
1.4	0.911	3.4	0.898
1.6	0.896	3.6	0.901
1.8	0.889	3.8	0.904
2.0	0.886	4.0	0.906

ومن ثَم فإن:

$$\mu_U = E[T_U(i)] = (150)(0.896) = 134.4$$
$$\mu_D = E[T_D(i)] = (8)(0.940) = 0.95$$

والآن سنعتبر نظاماً مكوناً من العديد من العناصر المستقلة عن بعضها. وعندما يتعطل أحد هذه العناصر، فإنه يتم إصلاحه عن طريق رجل خدمة يقوم بإصلاح العناصر عن طريق العنصر الواصل أولاً يُخدم أولاً. نهتم هنا بعدد العناصر التي تعمل عند أي لحظة زمنية. تعتبر شبكة من الحاسبات الآلية، والتي ينظر فيها إلى جهاز الحاسب كعنصر، مثالاً لنظام من النوع الذي هو قيد الدراسة الآن. يمكن استخدام عملية ماركوف بزمن متصل كنموذج لدراسة مثل هذا النوع من الأنظمة.

دعنا نرمز بالرمز k إلى عدد عناصر النظام، وليكن i عبارة عن رقم العنصر العامل، ولنفرض أن النظام يمكن أن ينتقل بين حالاته المختلفة بناء على المعدلات التالية:

الانتقال من الحالة i إلى الحالة $i-1$ بالمعدل $i\mu$، $i=1,2,\cdots,k$ ،

(١٠,١)

الانتقال من الحالة i إلى الحالة $i+1$ بالمعدل λ ، $i=0,1,\cdots,k-1$

إذا كان عدد العناصر العاملة عند اللحظة $k-1$ ، إذن احتمال تعطل النظام خلال فترة زمنية قصيرة طولها Δ يكون تقريباً $i\mu\Delta$. يمكن تفسير الكمية μ على أنها معدل إخفاق أحد

العناصر. واحتمال انتهاء إصلاح أحد العناصر التي قد تعطلت خلال فترة قصيرة طولها Δ يعطى تقريباً بالكمية $\lambda\Delta$. ويمكن تفسير الكمية λ على أنها معدل إصلاح أحد العناصر التي تحت الإصلاح.

من النقاط التي يجب ملاحظتها هنا هي أن هذا النوع من الأنظمة يكون له نفس بناء نظام الطوابير M/M/k بسعة منتهية، كما قدمنا في البند (٩,١). يمثل معدل الإصلاح λ معدل الوصول في نظام الطوابير M/M/k، وعناصر الطابور هنا تكون عبارة عن العناصر التي تم إصلاحها. أما معدل إخفاق أحد العناصر λ فيناظر معدل إتمام الخدمة في نظام الطوابير M/M/k. ولأنه يوجد على الأكثر عدد k من العناصر العاملة في النظام، إذن يمكن اعتبار النظام القابل للإصلاح عبارة عن نظام طوابير بسعة منتهية والذي يمكن أن يستوعب على الأكثر عدد k من الزبائن عند أي لحظة.

يمكن تطبيق معادلات الموازنة المعروضة في البند (٩,١)، لحساب احتمالات الحالة المستقرة لعدد العناصر العاملة في النظام عند أي لحظة. وباستخدام الرموز المستخدمة في البند (٩,١)، يكون لدينا:

$$\lambda_i = \lambda, \quad i = 0,1,\cdots,k-1,$$
$$\mu_i = i\mu, \quad i = 1,\cdots,k.$$

وبتطبيق النتائج المعروضة في البند (٩,١)، نحصل على احتمالات الحالة المستقرة، لعدد العناصر العاملة في نظام يحتوي على فني إصلاح واحد، في الصورة التالية:

$$p_i = \frac{\lambda^i}{\mu^i\, i!} p_0, \quad i = 1,\cdots,k-1,$$
$$p_0 = \left(1 + \sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda^i}{\mu^i\, i!}\right)^{-1}.$$

مثال (١٠,١٢)

يحتوي أحد المباني على ثلاثة مكيفات هوائية تعمل بشكل مستقل عن بعضها. معدل إخفاق أي منها يكون عبارة عن مكيف واحد كل 120 يوماً. يمكن للفني إتمام إصلاح مكيف واحد كل خمسة أيام. بتطبيق نموذج ماركوف على هذا النظام، فإنه يمكن الحصول على احتمالات الحالة المستقرة كما يلي:

$$p_0 = \left(1 + \sum_{i=1}^{3} \frac{(1/5)^i}{(1/20)^i \, i!}\right)^{-1} = 0.00038,$$

$$p_1 = \frac{(1/5)}{(1/20)} p_0 = 0.00918,$$

$$p_2 = \frac{(1/5)^2}{(1/20)^2 \, 2!} p_0 = 0.11005,$$

$$p_3 = \frac{(1/5)^3}{(1/20)^3 \, 3!} p_0 = 0.88040.$$

متوسط عدد الأيام في العام والتي يكون فيها جميع المكيفات عاطلة عن العمل هو:

$$p_0 \times 365 = (0.00038)\,(365) = 0.14\,,$$

متوسط عدد الأيام في العام والتي تعمل فيها جميع المكيفات هو:

$$p_3 \times 365 = (0.8804)\,(365) = 321.$$

والآن سنعتبر أن نظاماً قابلاً للإصلاح يتوفر فيه أكثر من فني إصلاح واحد. ونفرض أن عدد فنيي الإصلاح هو c، حيث إن $c \le k$. يفترض أيضًا أن الفنيين يعملون بشكل مستقل عن بعضهم، وكل منهم يعمل بمعدل إصلاح λ. إذا كان عدد العناصر العاطلة أكبر أو يساوي العدد c، فإن جميع الفنيين سيكونون مشغولين بعمليات الإصلاح، أما إن كان عدد العناصر العاطلة عن العمل أقل من عدد الفنيين، فإن عدد الفنيين المنشغلين بعمليات الإصلاح يكون مساوياً لعدد العناصر العاطلة عن العمل. مرة ثانية باستخدام نفس رموز معادلات الموازنة، وبفرض أن i يرمز إلى عدد العناصر العاملة، إذن لدينا نظام ماركوف بالمعاملات:

$$\lambda_i = \begin{cases} c\lambda, & i = 0,1,\cdots,k-c, \\ (k-i)\lambda, & i = k-c+1,\cdots,k, \end{cases}$$

$$\mu_i = i\mu, \quad i = 1,\cdots,k.$$

ومن ثَم فإن:

$$\frac{\lambda_0\,\lambda_1\cdots\lambda_{i-1}}{\mu_1\,\mu_2\cdots\mu_i} = \begin{cases} \dfrac{(c\lambda)^i}{\mu^i\, i!}, & i = 1,2,\cdots,k-c+1, \\ \dfrac{c^{k-c+1}\lambda^i}{\mu^i\, i!}(c-1)\cdots(k-i+1), & i = k-c+2,\cdots,k. \end{cases}$$

سنطبق هذه النتيجة من خلال المثال التالي، حيث ندرس نظام بعاملي إصلاح.

مثال (١٠,١٣)

بالعودة إلى النظام المقدم في مثال (١٠,١٢) ولكن بفرض أنه يحتوي على عاملي إصلاح. الاختيار المناسب لحساب احتمالات الحالة المستقرة لعدد المكيفات العاملة هو:

$$\lambda_0 = \tfrac{2}{5}, \quad \lambda_1 = \tfrac{2}{5}, \ \lambda_2 = \tfrac{2}{5},$$
$$\mu_1 = \tfrac{1}{120}, \quad \mu_2 = \tfrac{2}{120}, \ \lambda_2 = \tfrac{3}{120},$$
$$\tfrac{\lambda_0}{\mu_1} = 48, \quad \tfrac{\lambda_1}{\mu_2} = 1152, \ \tfrac{\lambda_2}{\mu_3} = 9216.$$

ومن ثَم فإن:

$$p_0 = \left(1 + 48 + 1152 + 9216\right)^{-1} = \frac{1}{10417} = (9.6)10^{-5},$$

$$p_1 = \frac{48}{10417} = 0.00461,$$

$$p_2 = \frac{1152}{10417} = 0.11059,$$

$$p_3 = \frac{9216}{10417} = 0.88471.$$

ومن ثم فإن إضافة الفني الثاني لا يقدم تغيراً مُعتبراً في احتمالات وجود مكيفين أو ثلاثة مكيفات عاملة. فرصة الإخفاق الكلي (أي جميع المكيفات الثلاثة عاطلة عن العمل) تغيرت من 3.8×10^{-4} إلى 9.6×10^{-5}. وهذا يمثل تغيراً من إخفاق كلي واحد كل 2600 يومٍ إلى

إخفاق كلي واحد كل 10500 يوم. وبالرغم من وجود فني واحد أو اثنين في النظام، فإن فرصة حدوث إخفاق كلي يكون صغيراً، ويحدث الإخفاق الكلي بتكرار أقل بكثير عندما يوجد فنيين في النظام.

(١٠,٦) عمليات بواسون غير المتجانسة وتطور الموثوقية

Nonhomogeneous Poisson process and reliability growth

لنفرض عملية بواسون غير متجانسة بدالة المتوسط $\mu(t)$ ، انظر البند (٧,٩). دالة الشدة $\lambda(t)$ تُعرف بالعلاقة التالية:

$$\lambda(t) = \frac{d}{dt}\mu(t)$$

سنستخدم عملية بواسون غير المتجانسة كنموذج لعدد الإخفاقات لنظام ما أو عدد العيوب الموجودة في نظام ما. فيما يلي، تعني دالة الشدة المتزايدة تزايد تكرار الإخفاقات أو العيوب مع زيادة الزمن، ويمكن أن نُرجع ذلك إلى طول فترة استخدم النظام. ومن ناحية أخرى، تعني دالة الشدة المتناقصة مع الزمن زيادة الثقة في النظام مع مرور الزمن، ويمكن أن نُرجع ذلك إلى إصلاح الأخطاء التي في النظام.

إذا كانت الدالة $\lambda(t)$ تناقصية مع الزمن، فإننا نقول بأن النظام يُظهر تطوراً في موثوقيته. يمكن تطوير موثوقية نظام ما عندما يتم تصحيح بعض الأخطاء التي يحتويها، ومن ثم يتم تحسين تصميم النظام. وكمثال، عندما يقوم موظف في مكتب جديد بتعبئة استمارة ما، فإن معدل وقوعه في أخطاء يمكن أن يقل كلما اكتسب خبرة أكثر. وكمثال آخر: برمجيات الحاسوب تُظهر تحسناً في موثوقيتها في إصداراتها المتتالية، بمعنى أن الإصدار الثاني منها يُوثق به بدرجة أكبر من الإصدار الأول، كما أنه يُوثق في الإصدار الثالث بدرجة أكبر من الإصدار الثاني، وهكذا.

تعتبر عملية وايبل من العمليات ذات الاهتمام الخاص، حيث إن دالة الإخفاق تأخذ الصورة التالية:

$$\lambda(t) = (\beta/\alpha)(t/\alpha)^{\beta-1}$$

ومن ثَم فإن دالة المتوسط $\mu(t)$ هي:

$$\mu(t) = (t/\alpha)^{\beta}$$

إذا كان $\beta > 1$ ، فإن دالة الشدة تتزايد مع الزمن، أما إذا كان $\beta < 1$ ، فإن دالة الإخفاق تتناقص مع الزمن. بفرض أن T_1 يرمز إلى زمن أول إخفاق، إذن:

$$P(T_1 > t) = P(N(t) = 0) = \exp\left\{-(t/\alpha)^{\beta}\right\}$$

ومن ثَم فإن دالة التوزيع التراكمية لزمن أول إخفاق هي:

$$F_1(t) = 1 - \exp\left\{-(t/\alpha)^{\beta}\right\}$$

وهذا ينتج أن الزمن T_1 يتبع توزيع وايبل. وبخلاف عملية التجديد، نجد أن الزمن بين الإخفاق رقم $n-1$ ، والإخفاق رقم n ، يعتمد على زمن حدوث الإخفاق رقم $n-1$ ، بمعنى أن:

$$\begin{aligned} P(T_n > t + s \mid T_{n-1} = s) &= P(N(t+s) - N(s) = 0) \\ &= \exp\left\{-\left(\frac{t+s}{\alpha}\right)^{\beta} + \left(\frac{s}{\alpha}\right)^{\beta}\right\} \end{aligned}$$

مثال (١٠,١٤)

لنفرض أن نظام كمبيوتر مكون وحدات، وعندما تتعطل إحدى وحداته فإنه يتم استبدالها بوحدة جديدة مماثلة، وبناء على الخبرة السابقة بمثل هذه الوحدة التي يتم استبداها وجد أن زمن عملها إلى أن تتعطل باليوم يتبع توزيع وايبل بالمعلمتين $\alpha = 0.25, \beta = 0.5$. إذن يمكن حساب احتمال عُطل أكثر من خمس وحدات خلال الأيام العشرة الأولى بملاحظة أن $\mu(10) = (10/0.25)^{0.5} = 6.325$. ومن ثَم فإن:

$$P(N(10) > 5) = \sum_{k=6}^{\infty} e^{-6.325} \frac{(6.325)^k}{k!} = 0.605$$

ولحساب احتمال حدوث أكثر من خمسة أعطال خلال الأيام العشرة التالية للعشر الأولى، يمكن ملاحظة أن $\mu(20) - \mu(10) = (20/0.25)^{0.5} - (10/0.25)^{0.5} = 2.62$ ، ومن ثم فإن:

$$P\big(N(20)-N(10)>5\big)=\sum_{k=6}^{\infty}e^{-2.62}\frac{(2.62)^k}{k!}=0.051$$

ومن ثَم فإن موثوقية النظام تتحسن في دورة الأيام العشرة الثانية أكثر منها خلال دورة الأيام العشرة الأولى، وسيستمر هذا التحسن تدريجياً من ذلك الحين فصاعداً.

مثال (١٠,١٥)

لنفرض أننا في المثال (١٠,١٤) أردنا معرفة مدة استمرار عملية تحسن الموثوقية حتى يكون احتمال تعطل وحدة أو أكثر في دورة عمل طولها يوم واحد مساوياً لـ 0.10 . يمكن أن يُعطى هذا الاحتمال بالعلاقة التالية:

$$\begin{aligned}P\big(N(t+1)-N(t)\geq 1\big)&=1-P\big(N(t+1)-N(t)<1\big)\\&=1-P\big(N(t+1)-N(t)=0\big)\\&=1-\exp\left\{-\left(\frac{t+1}{\alpha}\right)^{\beta}+\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta}\right\}\end{aligned}$$

ومن ثم فإن المطلوب الآن هو حل المعادلة التالية بالنسبة للمتغير t:

$$0.10=1-\exp\left\{-\left(\frac{t+1}{\alpha}\right)^{\beta}+\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta}\right\}$$

وبإعادة كتابة هذه المعادلة، يمكن أن نحصل عليها في الشكل التالي:

$$-\left(\frac{t+1}{\alpha}\right)^{\beta}+\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta}+\ln(0.9)=0$$

وبالتعويض عن قيم α,β، نحصل على:

$$2(t+1)^{0.5}-2t^{0.5}-0.105=0$$

وبحل هذه المعادلة عدديًا، نحصل على قيمة $t=89.641$. أي أن التحسن سيستمر تقريبًا لمدة 90 يوماً حتى يكون احتمال تعطل وحدة أو أكثر في دورة عمل طولها يوم واحد مساوياً لـ 0.10 .

(١٠,٧) تمارين

(١٠,١) لنفرض أن زمن حياة نظام ما يتبع التوزيع المنتظم على الفترة $[0,5]$، ارسم دالة موثوقية هذا النظام.

(١٠,٢) لنفرض أن دالة الكثافة الاحتمالية لزمن حياة بطارية كشاف كهربي بالساعات تُعطى بالعلاقة الآتية:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{12}{x^2}, & x>2,\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

١- ارسم دالة موثوقية.

٢- لنفرض أنه حتى يعمل أحد الكشافات فإنه يجب أن تعمل بطاريتان في نفس الوقت، أوجد دالة موثوقية ذلك الكشاف.

٣- بتعريف منتصف عمر نظام ما على أنه الزمن الذي يتحقق عنده موثوقية النظام تساوي $1/2$. احسب منتصف عمر نظام يحتاج إلى بطارية واحدة، ونظام يحتاج إلى بطاريتين.

(١٠,٣) يمتلك جهاز كمبيوتر مشغلي أقراص. زمن حياة كل منها، بآلاف الساعات، يتبع توزيع وايبل بالمعلمتين $\alpha=8,\beta=2$. بفرض أن الجهاز سيتعطل إذا تعطل أحد المشغلين، احسب دالة موثوقية الجهاز.

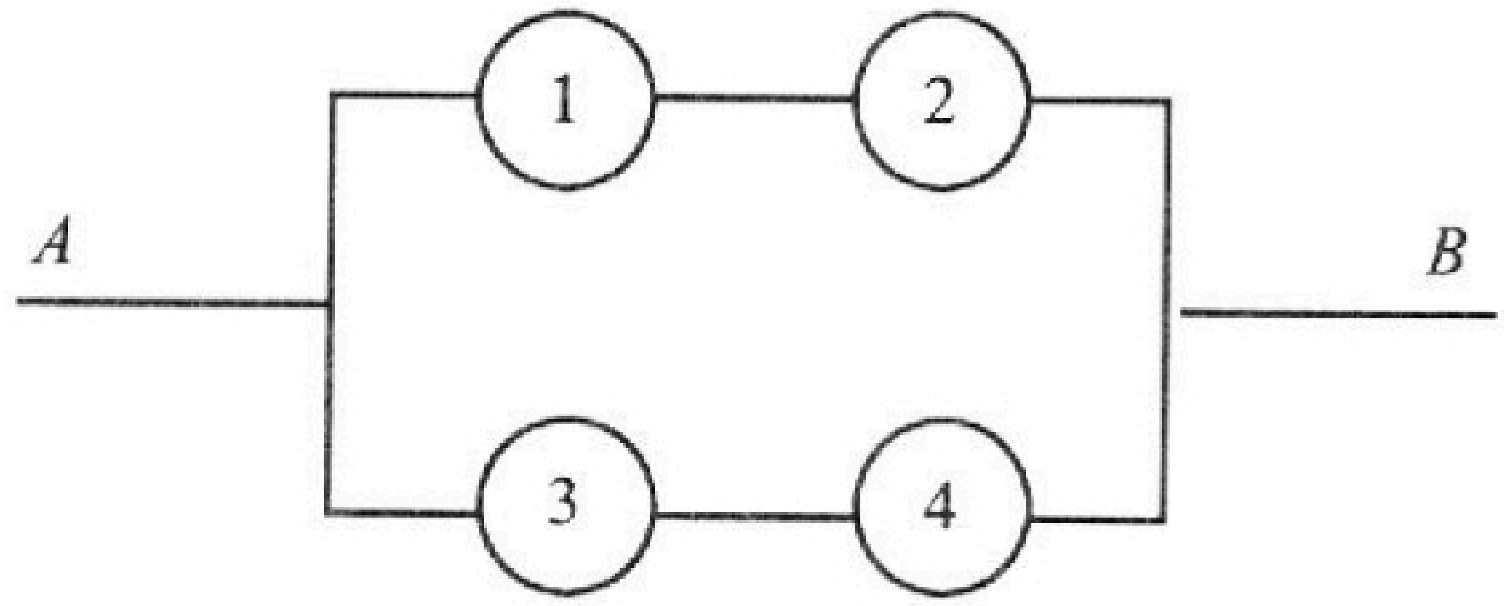
(١٠,٤) بفرض أربعة عناصر بدوال الموثوقية التالية:

$$R_1(t)=e^{-t}\ ,\ \ R_2(t)=e^{-2t}\ ,\ \ R_3(t)=e^{-3t}\ ,\ \ R_4(t)=e^{-4t}$$

١- احسب دالة موثوقية نظام توالٍ مكون من العناصر الأربعة.

٢- احسب دالة موثوقية نظام توازٍ مكون من العناصر الأربعة.

٣- احسب دالة موثوقية النظام الموضح بالشكل (١٠,٨).



شكل (١٠,٨): نظام التوالي/التوازي للتمرين (١٠,٤).

(١٠,٥) تمتلك سفينة فضاء جهازي كمبيوتر. زمن حياة كل منهما يتبع توزيعاً أسياً بمتوسط 2000 ساعة. ولإتمام أي تجربة يجب أن يكون أحد الجهازين على الأقل يعمل أثناء القيام بالمهمة. ما هي مدة المهمة التي يمكن أن تتم بنجاح باحتمال 0.995.

(١٠,٦) يتكون نظام توازٍ من ثلاثة عناصر مستقلة عن بعضها. أزمنة حياة هذه العناصر تتبع توزيعات أسية بالمتوسطات 1، $1/2$، $1/3$. ارسم دالة إخفاق النظام.

(١٠,٧) يتكون نظام توالٍ من n من العناصر المتطابقة والمستقلة عن بعضها. إذا كان زمن حياة أحد هذه العناصر يتبع توزيع وايبل بالمعلمتين $\alpha = 1, \beta = 2$. قارن دالة إخفاق النظام بـــ $n = 3$ بدالة إخفاق نظام مكون من عنصرين. أي من النظامين سيُنهك أسرع وذلك باستخدام دالة الإخفاق؟

(١٠,٨) زمن حياة سيارة، بالسنين، يتبع توزيعاً منتظماً على الفترة $[1,5]$، أوجد دالة إخافاقها.

(١٠,٩) وضعت قطعة قماش في ماكينة ثم عُرضت لإجهاد حتى مُزِقت. تُعطى دالة إخفاق هذه القطعة بالعلاقة $h(t) = 2\exp\{0.5t\}, t > 0$. أوجد احتمال أن قطعة القماش ستدوم على الأقل ساعة واحدة قبل أن تتمزق.

(١٠,١٠) ليكن T عبارة عن متغير عشوائي بدالة الإخفاق $h(t) = t^2 + t, t > 0$.

١- احسب دالة الموثوقية ودالة الكثافة الاحتمالية للمتغير T.

٢- احسب متوسط الزمن حتى الفشل.

(١٠,١١) يستقبل مكتب خدمات طلبات لإرسال رسائل بناء على عملية بواسون بمعدل طلب كل 6 دقائق. يرسل المكتب رسالة عندما يستقبل أربع طلبات.

١- ما هو احتمال إرسال على الأقل 3 رسائل في ساعة؟

٢- ما هو احتمال أن الزمن بين إرسال رسالتين يكون أقل من نصف ساعة؟

(١٠,١٢) يجب أن يمر خط إنتاج تجميع السيارات بمرحلة الصيانة من حين إلى آخر. وقت عمل هذا الخط يتبع توزيع جاما بالمعلمتين $\alpha = 8, \beta = 2$، وزمن الصيانة يتبع توزيع جاما بالمعلمتين $\alpha = 0.25, \beta = 2$، أوجد احتمال عمل هذا الخط في المدى البعيد.

(١٠,١٣) يتكون نظام قابل للإصلاح من ماكينتين وفني إصلاح. معدل الإصلاح هو λ، ومعدل الفشل هو $\mu = 10$.

١- أوجد الاحتمال النهائي لعمل كل من الماكينتين.

٢- بفرض أنه بدلاً من وجود فني واحد، يوجد فنيين اثنين. قارن احتمال الحالة المستقرة لكل من النظامين.

٣- لنفرض وجود k من المكائن وk من الأنظمة، أوجد احتمال وجود ماكينة عاملة واحدة على الأقل.

(١٠,١٤) لنفرض أن عدد الأخطاء التي يقع فيها فني ما مُلتحق في برنامج تدريبي في اليوم يتبع عملية وايبل بالمعلمتين $\alpha = 1, \beta = 0.2$.

١- ما هو احتمال وقوع الفني على الأقل في خطأ واحد في نصف اليوم الأول؟

٢- ما هو احتمال وقوع الفني في ثلاثة أخطاء على الأكثر خلال اليومين الأول والثاني.

٣- بفرض حضور الفني للتدريب لمدة ثلاثة أيام، فما هو احتمال وقوعه في خطأ واحد على الأقل في اليوم التالي؟

٤- ما طول فترة تدريب الفني، وعدد أيام تدريبه، حتى يقع في خطأ واحد على الأقل في اليوم التالي باحتمال 0.05؟

(١٠,١٥) عندما تخضع مُعَدَّة جديدة للاختبار والتطوير، وجد أن عدد التصاميم التي تتغير في الشهر تتبع عملية بواسون بالمعدل $\lambda(t)=1/(1+t), t>0$.

١- أوجد دالة المتوسط.

٢- ما هو احتمال تغير ثلاثة تصاميم على الأقل في شهرين؟

٣- ستتوقف عملية الاختبار بعد مرور s من الشهور عندما يكون احتمال عدم تغير النظام في الشهر التالي مساوياً 0.9، ما هي مدة الاختبار؟

الفصل الحادي عشر

عمليات التفرع

Branching Processes

(١١,١) مقدمة

لنفرض أنه يمكن لكائن ما أن يتسبب في نهاية حياته في إنشاء كائنات متعددة من نفس النوع، المجموعة الابتدائية من هذا الكائن، والتي تسمى بالجيل الأولي initial generation، يكون لها ذرية والتي تُكون الجيل الأول first generation، وكل عنصر من عناصر هذا الجيل يمكن أن يكون له ذرية، ومجموعة الذراري التي تنتج من أفراد الجيل الأول تُكون الجيل الثاني second generation، وهكذا. سنهتم في هذا الفصل بدراسة أحجام الذراري المتعاقبة، واحتمال انقراض الذرية، والحجم الكلي لجميع الأجيال. سنوضح أن تعداد المجتمع الناتج من هذه العملية يكون مثالاً لسلسلة ماركوف ببناء خاص، والتي تُسمى بعملية التفرع.

يوجد العديد من الأمثلة على عمليات تفرع ماركوف والتي تنتج في العديد من الأنظمة العلمية المختلفة. وفيما يلي سنقدم بعضاً من هذه الأمثلة:

مثال (١١,١,١): مُعدد الإلكترون Electron multiplier

يتكون معدد الإلكترون من مصدر وعدد من الحواجز المستوية المتتالية والمتباعدة، فهو عندما يصدر إلكتروناً من المصدر ويصطدم بأحد الحواجز فإنه يُولد عدداً عشوائيًا من الإلكترونات، والتي بدورها عندما يصطدم أي منها بالحاجز التالي فإنه يولد عدداً عشوائيًا من الإلكترونات، وهكذا عندما يصطدم إلكترون مولد من الحاجز الحالي بالحاجز الذي يليه

يتسبب في توليد عدد عشوائي من الإلكترونات. متتابعة أعداد الإلكترونات التي تنبعث من كل حاجز تُكون عملية تفرع.

مثال (١١,٢): سلسلة تفاعل نيترون Neutron chain reaction

يمكن أن تنشطر النواة عندما تصطدم عشوائيًا بنيوترون، تنتج عملية الانشطار عددًا عشوائيًا من النيوترونات، وكل من هذه النيوترونات يمكن أن يصطدم بنواة أخرى منتجاً عدداً عشوائيًا إضافيًا من النيوترونات، وهكذا. متتابعة أعداد النيوترونات التي تنتج من كل انشطار تُكون عملية تفرع.

مثال (١١,٣): انقراض العائلات Extinction of families

لنفرض أن لشخص ما عدداً معيناً من ذريته ذكوراً، وكل ذكر من هذه الذرية يمكن أن يكون له ذرية من الذكور بنفس التوزيع الاحتمالي للذكور من ذرية الآخرين، وهكذا. علاوة على ذلك لنفرض أن عدد الذكور من ذرية شخص ما لا يتأثر بتاريخ العائلة، أو بعدد الذكور من ذرية أخيه أو بعدد الذكور من أبناء عمومته. إذن أعداد الذكور في هذه السلالة تُكون عملية تفرع.

ولصياغة عملية التفرع سنرمز بـ X_n إلى حجم المجتمع في الجيل رقم n، ومن ثَم فإن X_0 يكون عبارة عن حجم المجتمع الأولي. وأيضًا لنفرض أن Y_{ni} يرمز إلى عدد ذرية الشخص رقم i في الجيل رقم n. ونفرض أن المتغيرات العشوائية Y_{ni}، $(n = 0,1,\cdots; i = 1,2,\cdots)$ تكون مستقلة ولها نفس التوزيع، ومن ثَم فإن عدد ذرية أحد الأشخاص لا يعتمد على تاريخه الماضي، أو ماهو عدد الأشخاص الحاليين، أو ما هو عدد الذرية عند الآخرين. ومن ثَم نفرض أن توزيع Y_{ni} هو:

$$p_k = P(Y_{ni} = k),\ k = 0,1,\cdots \tag{١١,١}$$

حيث إن $p_k \geq 0 \forall k$ وأن $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$، وليكن $\mu = E[Y_{ni}]$ ، $\sigma^2 = \text{Var}[Y_{ni}]$.

الدالة المولدة للاحتمال للمتغير العشوائي Y_{ni} تعطى بالعلاقة التالية:

$$g(z) = E\left[z^{Y_{ni}}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k,\ 0 \leq z \leq 1$$

ومعرفة الدالة المولدة للاحتمال تكافئ بشكل ما معرفة دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي. يمكن استخدام العلاقة التالية للحصول على التوزيع الاحتمالي من الدالة المولدة للاحتمال:

$$p_k = \frac{1}{k!}\frac{d^k g(z)}{dz^k}\bigg|_{z=0}, k = 1,2,\cdots$$

عمومًا يتكون الجيل رقم $n+1$ من نسل الجيل رقم n والذي ينتج كل شخص فيه ذرية بناء على التوزيع الاحتمالي (١١,١)، ومن ثَم فإن العلاقة التالية تعطي تعداد الجيل رقم $n+1$:

$$X_{n+1} = Y_{n1} + Y_{n2} + \cdots + Y_{nX_n} \qquad (١١,٢)$$

يتضح مما سبق أن عملية التفرع $\{X_n\}$ تكون عبارة عن سلسلة ماركوف بفضاء الحالة $S = \{0,1,\cdots\}$ وفضاء المعلمة $T = \{0,1,\cdots\}$.

(١١,٢) متوسط وتباين عملية التفرع
Mean and variance of branching process

نلاحظ من المعادلة (١١,٢) أن X_{n+1} يكون عبارة عن مجموع عشوائي لمتغيرات عشوائية. وفيما يلي سنستنتج كلاً من متوسط وتباين عملية التفرع، وللحصول عليهما نفرض أن $E[X_n] = \mu_n$، وأن $\mathrm{Var}[X_n] = \sigma_n^2$، ومن ثَم وباستخدام العلاقة (١١,٢) يمكن التحقق من أن توقع X_{n+1} هو:

$$\mu_{n+1} = \mu\,\mu_n \qquad (١١,٣)$$

وتباين X_{n+1} هو:

$$\sigma_{n+1}^2 = \sigma^2\,\mu_n + \mu^2\,\sigma_n^2 \qquad (١١,٤)$$

والآن نتحقق من صحة العلاقة (١١,٣):

$$\begin{aligned}
\mu_{n+1} &= E[X_{n+1}] \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} E[X_{n+1} \mid X_n = j] P[X_n = j] \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} E[Y_{n1} + Y_{n2} + \cdots + Y_{nX_n} \mid X_n = j] P[X_n = j] \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} E[Y_{n1} + Y_{n2} + \cdots + Y_{nj}]\, P[X_n = j] \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} j\, E[Y_{n1}]\, P[X_n = j]
\end{aligned}$$

ومن ثم:

$$\mu_{n+1} = \sum_{j=1}^{\infty} j\, \mu\, P[X_n = j]$$

أي أن:

$$\begin{aligned}
\mu_{n+1} &= \mu \sum_{j=1}^{\infty} j\; P[X_n = j] \\
&= \mu\, E[X_n] \\
&= \mu\, \mu_n
\end{aligned}$$

وللتحقق من صحة العلاقة (١١,٤) يمكن أن نبدأ بالتعريف البدائي للتباين:

$$\begin{aligned}
\sigma_{n+1}^2 &= \operatorname{Var}(X_{n+1}) = E\left[(X_{n+1} - E[X_{n+1}])^2\right] \\
&= E\left[(X_{n+1} - \mu X_n + \mu X_n - \mu \mu_n)^2\right] \\
&= E\left[(X_{n+1} - \mu X_n)^2\right] + E\left[(\mu X_n - \mu \mu_n)^2\right] \\
&\quad + 2E\left[(X_{n+1} - \mu X_n)(\mu X_n - \mu \mu_n)\right]
\end{aligned} \tag{١١,٥}$$

ولكن:

$$E\left[(X_{n+1}-\mu X_n)^2\right]=\sum_{j=0}^{\infty}E\left[(X_{n+1}-\mu X_n)^2 \mid X_n=j\right]P(X_n=j)$$
$$=\sum_{j=1}^{\infty}E\left[(X_{n+1}-\mu X_n)^2 \mid X_n=j\right]P(X_n=j)$$
$$=\sum_{j=1}^{\infty}E\left[(Y_{n1}+Y_{n2}+\cdots+Y_{nj}-\mu j)^2 \mid X_n=j\right]P(X_n=j)$$

وحيث إن $Y_{n1},Y_{n1},\cdots,Y_{nj}$ مستقلة، إذن:

$$E\left[(X_{n+1}-\mu X_n)^2\right]=\sum_{j=1}^{\infty}j\,\mathrm{Var}(Y_{n1})P(X_n=j)$$
$$=\mathrm{Var}(Y_{n1})\sum_{j=1}^{\infty}j\,P(X_n=j)$$
$$=\sigma^2\mu_n$$

أما:

$$E\left[(\mu X_n-\mu\mu_n)^2\right]=\mu^2E\left[(X_n-\mu_n)^2\right]$$
$$=\mu^2\,\mathrm{Var}(X_n)=\mu^2\sigma_n^2$$

بينما:

$$E\left[(X_{n+1}-\mu X_n)(\mu X_n-\mu\mu_n)\right]=\mu E\left[(X_{n+1}-\mu X_n)(X_n-\mu_n)\right]$$
$$=\mu\sum_{k=1}^{\infty}E\left[(Y_{n1}+Y_{n2}+\cdots+Y_{nj}-\mu j)(X_n-\mu_n)\right]P(X_n=j)$$
$$=\mu\sum_{k=1}^{\infty}E\left[Y_{n1}+Y_{n2}+\cdots+Y_{nj}-\mu j\right]E\left[X_n-\mu_n\right]P(X_n=j)$$
$$=0$$

إذن بالتعويض في العلاقة (١١,٥) نحصل على العلاقة (١١,٤).

لنفرض أنه في البداية $X_0=1$ ومن ثَم فإن $\mu_0=1$ ، $\sigma_0^2=0$، ومن ثم وباستخدام العلاقة (١١,٣) نحصل على $\mu_1=\mu\times 1=\mu$ ، $\mu_2=\mu\times\mu_1=\mu^2$ ، وبشكل عام فإن:

$$\mu_n=\mu^n, n=0,1,2,\cdots \qquad (١١,٦)$$

ومن ثم فإن متوسط حجم المجتمع يتزايد هندسياً عندما $\mu > 1$ ، ويتناقص هندسيًا عندما $\mu < 1$ ، بينما يظل ثابتًا عندما $\mu = 1$.

بالتعويض عن $\mu_n = \mu^n$ في (١١,٤) نحصل على:

$$\sigma_{n+1}^2 = \sigma^2 \mu^n + \mu^2 \sigma_n^2$$

باستخدام هذه العلاقة مع $\sigma_0^2 = 0$ ، نحصل على:

$$\begin{aligned}
\sigma_1^2 &= \sigma^2 \\
\sigma_2^2 &= \sigma^2 \mu + \mu^2 \sigma_1^2 = \sigma^2 \mu + \mu^2 \sigma^2 \\
\sigma_3^2 &= \sigma^2 \mu^2 + \mu^2 \sigma_2^2 = \sigma^2 \mu^2 + \sigma^2 \mu^3 + \sigma^2 \mu^4
\end{aligned}$$

وعمومًا، نحصل على:

$$\begin{aligned}
\sigma_n^2 &= \sigma^2 \left[\mu^{n-1} + \mu^n + \cdots + \mu^{2n-2}\right] \\
&= \sigma^2 \mu^{n-1} \left[1 + \mu + \cdots + \mu^{n-1}\right]
\end{aligned}$$

أي أن:

$$\sigma_n^2 = \sigma^2 \mu^{n-1} \times \begin{cases} n & \text{if } \mu = 1, \\ \dfrac{1-\mu^n}{1-\mu} & \text{if } \mu \neq 1. \end{cases} \qquad (١١,٧)$$

ومن ثَم فإن تباين حجم المجتمع يتزايد هندسياً عندما $\mu > 1$ ، ويتناقص هندسياً عندما $\mu < 1$ ، بينما يتزايد خطياً عندما $\mu = 1$.

(١١,٣) الدالة المولدة لاحتمالات عملية التفرع

Probability generating function of branching process

يمكن إعادة صياغة معادلة التفرع الأساسية (١١,٢) بشكل مكافئ باستخدام الدالة المولدة للاحتمال، ولعمل ذلك دعنا نفرض أن:

$$g_n(z) = E\left[z^{X_n}\right], \; n = 0,1,2,\cdots$$

هي الدالة المولدة لاحتمال حجم مجتمع الجيل رقم n ، وبفرض أن المجتمع الأولي مكون من شخص واحد، أي أن $X_0 = 1$ ، إذن يمكن التحقق من أن:

$$g_0(z) = E\left[z^1\right] = z\,,$$
$$g_1(z) = E\left[z^{X_1}\right] = E\left[z^{Y_{11}}\right] = g(z),$$

وعموماً:

$$\begin{aligned} g_{n+1}(z) &= E\left[z^{X_{n+1}}\right] \\ &= E\left[z^{Y_{n1}+Y_{n2}+\cdots+Y_{nX_n}}\right] \end{aligned}$$

وحيث إن المتغيرات العشوائية $Y_{n1}, Y_{n2}, \cdots, Y_{nX_n}$ مستقلة، إذن:

$$\begin{aligned} g_{n+1}(z) &= \underbrace{E\left[z^{Y_{n1}}\right]E\left[z^{Y_{n2}}\right]\cdots E\left[z^{Y_{nX_n}}\right]}_{X_n \text{ terms}} \\ &= \left[g(z)\right]^{X_n} \end{aligned}$$

يمكن كتابة $g_{n+1}(z)$ في الصورة التالية:

$$g_{n+1}(z) = g(g_n(z)) \tag{١١,٨}$$

فيما يلي يمكن التحقق من صحة العلاقة (١١,٨). بناء على التعريف الأصلي لـ $g_{n+1}(z)$ فإن:

$$\begin{aligned} g_{n+1}(z) &= E\left[z^{X_{n+1}}\right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} z^k\, P\{X_{n+1} = k\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} z^k \left(\sum_{j=0}^{\infty} P\{X_{n+1} = k \mid X_n = j\} P(X_n = j)\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} z^k \left(\sum_{j=0}^{\infty} P\{Y_{n1} + Y_{n2} + \cdots + Y_{nj} = k \mid X_n = j\} P(X_n = j)\right) \end{aligned}$$

وحيث إن X_n مستقل عن $Y_{n1}, Y_{n2}, \cdots, Y_{nj}$ ، إذن:

$$\begin{aligned} g_{n+1}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} z^k \left(\sum_{j=0}^{\infty} P\{Y_{n1} + Y_{n2} + \cdots + Y_{nj} = k\} P(X_n = j)\right) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} P\{Y_{n1} + Y_{n2} + \cdots + Y_{nj} = k\} z^k\right) P(X_n = j) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^{\infty} E\left[z^{Y_{n1}+Y_{n2}+\cdots+Y_{nj}}\right] P\left(X_n = j\right) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \underbrace{E\left[z^{Y_{n1}}\right] E\left[z^{Y_{n2}}\right] \cdots E\left[z^{Y_{nj}}\right]}_{j \text{ terms}} P\left(X_n = j\right) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \left[g(z)\right]^j P\left(X_n = j\right) \\
&= E\left[\left\{g(z)\right\}^{X_n}\right]
\end{aligned}
$$

ومن ثَم فإن:

$$g_{n+1}(z) = g_n\left(g(z)\right)$$

وهذا يكمل برهان العلاقة (١١,٨).

يمكن صياغة التعبير (١١,٨) بنفس الأسلوب لنحصل على:

$$
\begin{aligned}
g_{n+1}(z) &= g_{n-1}\left(g\left(g(z)\right)\right) \\
&= \underbrace{g\left(\cdots\left(g\left(g(z)\right)\right)\right)}_{n+1 \ \text{ iterations}} \\
&= g\left(g_n(z)\right)
\end{aligned}
$$

ومن ثم فإنه يمكن استنتاج الدالة المولدة لاحتمال حجم المجتمع في الجيل رقم n بشرط أن $X_0 = 1$، بالتعويض التكراري في الدالة المولدة لاحتمال توزيع الذرية Y_{ni}.

الدالة المولدة لاحتمال حجم المجتمع في الجيل رقم n، عندما يتكون المجتمع الأولي من i من الأشخاص، أي أن $X_0 = i$، تأخذ الشكل التالي:

$$\sum_{j=0}^{\infty} z^j P\left(X_n = j \mid X_0 = i\right) = \left[g_n(z)\right]^i$$

وهذا يعني أنه إذا كان المجتمع الأولي يتكون من i من الأشخاص، فإن المجتمع يتكون من i من المجتمعات الجزئية، كل منها انحدر من شخص واحد، وقدموا معاً، وكل منهم مستقل عن الآخر، إلا إنهم جميعاً لهم نفس التوزيع الاحتمالي. فمن هذا المنظور يمكن أن تنشأ عملية التفرع كمجموع i من عمليات التفرع المستقلة، واحدة لكل أصل أولي.

مثال (١١,٤)

لنفرض أن $g(z)=q+p\,z$ ، حيث إن $0<p<1$ ، $q+p=1$. عملية التفرع المناظرة تكون عملية وفاة بحتة. ففي كل دورة يمكن لشخص أن يتوفى باحتمال q أو يعيش باحتمال p . بالتكرار يمكن الحصول على $g_n(z)$:

$$\begin{aligned} g_2(z) &= g(g_1(z)) = q + p(g(z)) \\ &= q + p(q + p\,z) = 1 - p^2 + p^2\,z \end{aligned}$$

وعموماً فإن:

$$g_n(z) = 1 - p^n + p^n\,z$$

الدالة المولدة لاحتمال حجم المجتمع في الجيل رقم n ، إذا كان المجتمع الأولي يتكون من i من الأشخاص، هي:

$$[g_n(z)]^i = \left(1 - p^n + p^n\,z\right)^i$$

(١١,٤) زمن واحتمال الانقراض

Time and probability of extinction

من المواضيع الهامة والممتعة في عمليات التفرع موضوعان هما الزمن الذي يحدث عنده الانقراض واحتمال الانقراض. يحدث انقراض المجتمع إذا وفقط إذا اختُزِل حجم المجتمع إلى الصفر. الزمن العشوائي T الذي يحدث عنده الانقراض يكون عبارة عن أول زمن يحدث عنده $X_n = 0$ ، ومن ثم فإنه يمكن كتابة:

$$T = \inf\{n : X_n = 0\}$$

ومن ثَم فإنه من البديهي أن $X_k = 0$ لجميع قيم k التي تحقق أن $k \ge T$ ، ومن ثم نحصل على النتيجة المقدمة في النظرية التالية.

نظرية (١١,١)

يمكن حساب التوزيع الاحتمالي لزمن الانقراض من الدالة المولدة للاحتمال كالآتي:

$$P\{T = n\} = g_n(0) - g_{n-1}(0)$$

بناء على المصطلحات الفنية لسلسلة ماركوف، فإن الحالة 0 تكون حالة ماصة، وبناء عليه فإنه يمكن حساب احتمال الانقراض. بالإشارة بـــ u_n إلى احتمال الانقراض قبل أو عند الجيل رقم n، بشرط أن الجيل الأولي يحتوي على فرد واحد $X_0 = 1$:

$$u_n = P(T \le n) = P(X_n = 0)$$

لنفرض أن المجتمع الأولي له عدد k من الذرية، أي أن $X_1 = Y_{01} = k$، وكل منهم سوف يُنشئ مجتمعاً من نسله، ومن ثَم فإنه إذا انقرض المجتمع الأصلي عند أو قبل الجيل رقم n، فإن كل خط من خطوط السلالة سينقرض عند أو قبل الجيل رقم $n-1$. يوضح الشكل (١١,١) تحليلاً للمجتمعات الجزئية المتعاقبة لمجتمع سينقرض قبل أو عند الجيل رقم n.

والآن ولأن المجتمعات الجزئية، ذات العدد k، المنشأة بأفراد الذرية المختلفة للأصـــل الأولي تكون مستقلة، ولهم نفس الخصائص الإحصائية مثل المجتمع الأصلي، إذن احتمـــال أن ينقرض أحد هذه المجتمعات الجزئية عند أو قبل الجيل رقم $n-1$ هو u_{n-1}، وحيث أن عدد المجتمعات الجزئية يساوي k، إذن احتمال انقراض جميع هذه المجتمعات الجزئية بحلول الجيل رقم $n-1$ هو $\left(u_{n-1}\right)^k$ وذلك من خاصية الاستقلال.

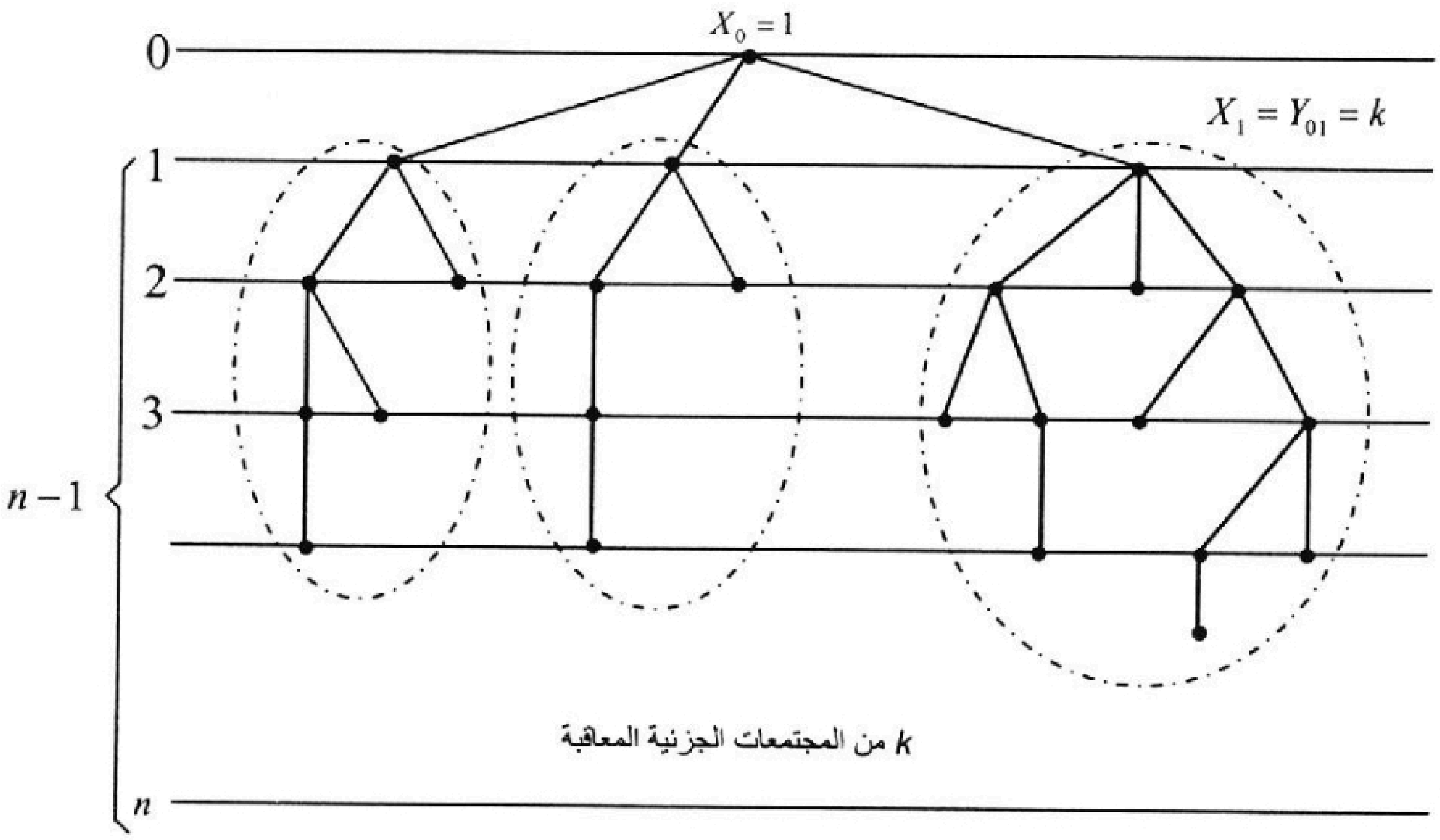
ومن ثم وباستخدام قانون الاحتمال الكلي يمكن الحصول على u_n في الشكل التالي:

$$\begin{aligned} u_n &= P(X_n = 0) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P(X_n = 0 \mid X_1 = k)\, P(X_1 = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P(X_n = 0 \mid Y_{01} = k)\, P(Y_{01} = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P(X_n = 0 \mid Y_{01} = k)\, p_k \end{aligned}$$

ولأن $P(X_n = 0 \mid Y_{01} = k)$ هو احتمال انقراض جميع المجتمعات الجزئية بحلول الجيل رقـــم n (أي بعد عدد $n-1$ من الأجيال المتعاقبة) بشرط أن عدد ذرية المجتمع الأولي يساوي k، إذن:

$$u_n = \sum_{k=0}^{\infty} \left(u_{n-1}\right)^k p_k \,,\; n = 1,2,\cdots \qquad (١١,٩)$$

حيث إن $u_0 = 0$ ، $u_1 = p_0$.



شكل (١١,١): تحليل للمجتمعات الجزئية المتعاقبة لمجتمع سينقرض قبل أو عند الجيل رقم n.

مثال (١١,٥):

لنفرض أن الأصل يمكن ألاّ يكون له ذرية باحتمال $\frac{1}{8}$، أو يكون له ذرية بالعدد 1 باحتمال $\frac{3}{8}$، أو يكون له ذرية بالعدد 2 باحتمال $\frac{4}{8}$، إذن:

$$u_n = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} u_{n-1} + \frac{4}{8} u_{n-1}^2 , n = 1,2,\cdots$$

وبالبدء بـــ $u_0 = 0$، وباستخدام العلاقة السابقة يمكن الحصول على:

$u_1 = 0.125$	$u_8 = 0.246$
$u_2 = 0.180$	$u_9 = 0.248$
$u_3 = 0.209$	$u_{10} = 0.249$
$u_4 = 0.225$	$u_{11} = 0.249$
$u_5 = 0.235$	$u_{12} = 0.249$
$u_6 = 0.241$	$u_{13} = 0.250$
$u_7 = 0.244$	$u_{14} = 0.250$

يمكن حساب احتمال انقراض المجتمع في نهاية الأمر عند زمن محدود غير معلوم، والذي سنرمز له بالرمز u_∞، باستخدام الدالة المولدة للاحتمال. تقدم النظرية التالية بدون برهان، والتي تعطي احتمال الانقراض u_∞.

نظرية (١١,٢)

يمكن الحصول على احتمال الانقراض كالآتي:

- إذا كان $E[Y_{ni}] \le 1$ إذن $u_\infty = 1$.
- إذا كان $E[Y_{ni}] > 1$ إذن u_∞ تأخذ أصغر حل غير سالب للمعادلة $g(z) = z$.

تسمى حلول المعادلة $f(z) = z$ بنقاط ثابتة للدالـــة $f(z)$. إذا كانـــت الدالـــة $f(z)$ عبارة عن دالة مولدة للاحتمال فإن $z = 1$ يكون أحد النقاط الثابتة لهذه الدالة وأي نقطة ثابتة أخرى يمكن أن تكون إما أصغر من 1، أو أكبر من 1، أو تساوي 1.

مثال (١١,٦)

بالعودة إلى المثال (١١,٥)، إذن:

$$g(z) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8}z + \frac{4}{8}z^2$$

المعادلة $g(z) = z$ تكافئ المعادلة التالية:

$$4z^2 - 5z + 1 = 0$$

وبحل هذه المعادلة نحصل على النقاط الثابتة التالية $z_1 = 1$ ، $z_2 = 0.25$. إذن أصغر حل موجب يعطي $u_\infty = 0.25$. لاحظ أن النتائج المعروضة في المثال السابق للقيم المتعاقبة لـــ u_n تتقارب إلى قيمة $u_\infty = 0.25$.

فيما يلي سنقدم مثالاً يتحقق فيه أن $u_\infty = 1$، بمعنى أن المجتمع حتمًا سينقرض عند زمن ما.

مثال (١١,٧)

لنفرض أن توزيع عدد الذرية هو $p_0 = \frac{3}{4}$ ، $p_2 = \frac{1}{4}$. ومن ثَم فإن:

$$g(z) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} z^2$$

ومن ثم فإن المعادلة $g(z) = z$ يكون لها الحلان $z_1 = 1$ ، و $z_2 = 3$ ، ومن ثَم فإن أصغر حل موجب يعطي $u_\infty = 1$، احتمال الانقراض في نهاية الأمر.

يوضح المثال التالي كيفية استخدام الدالة المولدة للاحتمال في حساب زمن الانقراض:

مثال (١١,٨)

وضحنا في المثال (١١,٤) أن الدالة المولدة لاحتمال حجم المجتمع في الجيل رقم n ، إذا كان المجتمع الأولي يتكون من i من الأشخاص، هي $[g_n(z)]^i = \left(1 - p^n + p^n z\right)^i$ ، ومن ثَم فإنه يمكن الحصول على التوزيع الاحتمالي لزمن الانقراض كالآتي:

$$\begin{aligned} P(T = n \mid X_0 = i) &= P(X_n = 0 \mid X_0 = i) - P(X_{n-1} = 0 \mid X_0 = i) \\ &= [g_n(0)]^i - [g_{n-1}(0)]^i \\ &= \left(1 - p^n\right)^i - \left(1 - p^{n-1}\right)^i \end{aligned}$$

(١١,٥) ذرية بتوزيع هندسي

Geometrically distributed offsprings

لنفرض أن عملية تفرع فيها ذرية أي عنصر في أي جيل يتبع توزيعاً هندسياً معمماً والمعرف كالآتي:

$$p_0 = \frac{1 - b - c}{1 - c},\ p_k = b\,c^{k-1}, k = 1, 2, \cdots$$

حيث إن $b, c > 0$ ، $b + c \le 1$. يمكن استنتاج الدالة المولدة للاحتمال لهذا التوزيع كالآتي:

$$\begin{aligned} g(z) = E\left[z^{Y_{ni}}\right] &= \sum_{j=0}^{\infty} z^j\, P\left(Y_{ni} = j\right) \\ &= z^0 P\left(Y_{ni} = 0\right) + \sum_{j=1}^{\infty} z^j\, P\left(Y_{ni} = j\right) \\ &= p_0 + \sum_{j=1}^{\infty} z^j\, b\,c^{j-1} = p_0 + b\,z \sum_{j=1}^{\infty} (z\,c)^{j-1} \end{aligned}$$

ومن ثَم فإن:

$$g(z) = \frac{1-b-c}{1-c} + \frac{bz}{1-cz}$$

باستخدام الدالة المولدة للاحتمال يمكن حساب متوسط التوزيع كالآتي:

$$\mu = \left.\frac{dg(z)}{dz}\right| = \frac{b}{(1-c)^2}$$

من الملامح الأكثر أهمية لهذه الدالة هي أنها تأخذ صورة تحويل خطي كسري linear fractional transformation والذي يمكن تكوينه بسهولة (انظر تمرين (١١,١١)). كما أن المعادلة $g(z) = z$ يكون لها الحلان $z_1 = 1$ ، و $z_0 = \frac{1-b-c}{c(1-c)}$. لاحظ أن $z_0 < z_1$ وذلك لأننا فرضنا أن $c > 0$ ، $b + c \le 1$.

مثال (١١,٩)

لنعد ثانية إلى المثال (١١,٣)، ولنفرض أن $p_0, p_1, \cdots$ ترمز إلى احتمال أن عنصراً ما، في أي جيل، يكون له ذرية بالعدد 0، 1، 2، ... على الترتيب، ولنفرض أن p_k لأي $k = 1, 2, \cdots$، تأخذ الصورة المعطاة في التوزيع الهندسي المعمم السابق. لدينا $p_0 = a = 1 - \frac{b}{1-c}$ ، $g(z) = a + \frac{bz}{1-cz}$، ومن ثَم فإن المعادلة $g(z) = z$ تكافئ المعادلة $(z-1)(cz-a) = 0$ والتي لها الجذران $z_1 = 1$ ، $z_2 = \frac{a}{c}$. ومن ثم فإن:

- إذا كان $b \le (1-c)^2$ إذن أصغر جذر موجب يعطي $u_\infty = 1$.
- خلاف ذلك، إذا كان $b > (1-c)^2$، إذن أصغر جذر موجب يعطي $u_\infty = \frac{a}{c} < 1$.

ومن ثَم فإن العائلة التي لها $\mu = \frac{b}{(1-c)^2} \le 1$ ستنقرض باحتمال 1. أما إذا كان $\mu = \frac{b}{(1-c)^2} > 1$ فإن العائلة يمكن أن تنقرض باحتمال $u_\infty = \frac{a}{c}$ وتنمو لتصبح بعشيرة أكبر باحتمال $1 - u_\infty = \frac{c-a}{c}$.

يمكن استنتاج بعض النتائج التي حصلنا عليها في البنود السابقة من هذا الفصل كحالات خاصة، كما توضحه مجموعة النظريات التالية.

نظرية (١١,٣)

لقيم $n = 1,2,\cdots$ ، الدالة $g_n(z)$ تأخذ الصورة التالية:

$$g_n(z) = \begin{cases} \dfrac{nc - [(n+1)c - 1]z}{1 + (n-1)c - ncz}, & \mu = 1, \\ 1 - \mu^n \left(\dfrac{1 - z_0}{\mu^n - z_0} \right) + \dfrac{\mu^n [(1 - z_0)/(\mu^n - z_0)]^2 z}{1 - [(\mu^n - 1)/(\mu^n - z_0)]}, & \mu \neq 1. \end{cases}$$

نظرية (١١,٤)

لقيم $n = 1,2,\cdots$ ، احتمال الانقراض عند الجيل رقم n يعطى بالعلاقة التالية:

$$P(X_n = 0) = g_n(0) = \begin{cases} \dfrac{nc}{1 + (n-1)c}, & \mu = 1, \\ 1 - \mu^n \left(\dfrac{1 - z_0}{\mu^n - z_0} \right), & \mu \neq 1. \end{cases}$$

نظرية (١١,٥)

لقيم $n = 1,2,\cdots$ ، التوزيع الاحتمالي لزمن الانقراض يُعطى بالعلاقة التالية:

$$P(T = n) = \begin{cases} \dfrac{c(1-c)}{[1 + (n-1)c][1 + (n-2)c]}, & \mu = 1, \\ \mu^{n-1} z_0 \dfrac{(\mu - 1)(1 - z_0)}{(\mu^n - z_0)(\mu^{n-1} - z_0)}, & \mu \neq 1. \end{cases}$$

وأخيراً، سنعتبر الحجم التراكمي لجميع الأجيال، والذي يغطى بالعلاقة التالية:

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} X_n = \sum_{n=0}^{T-1} X_n$$

إذا كان T منتهياً، فإن Z يكون مجموع عدد من الكميات المنتهية ومن ثَم فإن Z سيكون منتهياً. وإذا كان T غير منتهٍ، فإن Z يكون مجموع عدد لانهائي من الكميات، وكل منها يمكن أن يساوي الواحد الصحيح أو أكبر ومن ثَم فإن Z سيكون غير منتهٍ. تقدم النظرية التالية هذه النتيجة بالإضافة إلى التوزيع الاحتمالي للمتغير Z :

نظرية (١١,٦)

الحجم التراكمي Z لجميع الأجيال يكون منتهياً إذا كان وفقط إذا كان زمن الانقراض T منتهياً. بالإضافة إلى ذلك فإنه لأي $\beta \in [0,1)$:

$$E[\beta^Z \mid X_0 = i] = F(\beta)^i ,\ i = 0,1,2,\cdots$$

حيث إن العدد $F(\beta)$ يكون عبارة عن الحل الوحيد للمعادلة:

$$\alpha = \beta\, G(\alpha), 0 < \alpha \le u_\infty$$

مثال (١١,١٠)

بفرض التوزيع الهندسي العام generalized geometric distribution.

١- وضح أن توزيع X_n لكل $n = 0,1,2,\cdots$ يأخذ الصورة التالية:

$$P(X_n = k \mid X_0 = 1) = b_n\, c_n^{k-1} ,\ k = 1,2,\cdots$$

٢- بأخذ $b = 0.4$، $c = 0.2$، احسب الدالة F المولدة لاحتمال حجم المجتمع الكلي Z.

الحل

١- لإثبات الجزء الأول، سنستخدم الاستدلال لتوضيح أن $g_n(z) = a_n + \frac{b_n z}{1 - c_n z}$.

لدينا:

$$g_1(z) = g(z) = a + \frac{b z}{1 - c z}$$

وحيث إن:

$$g_{n+1}(z) = g_n(g(z))$$

ولنفرض أن:

$$g_n(z) = a_n + \frac{b_n z}{1 - c_n z}$$

لبعض القيم a_n, b_n, c_n، ومن ثَم فإن:

$$g_{n+1}(z) = g_n(g(z))$$

$$= a_n + \frac{b_n\left(a + \frac{bz}{1-cz}\right)}{1 - c_n\left(a + \frac{bz}{1-cz}\right)}$$

$$= a_n + \frac{b_n a(1-cz) + b b_n z}{(1-c_n a)(1-cz) - c_n bz}$$

$$= a_n + \frac{b_n a + b_n (b - ca) z}{1 - c_n a - (c - c_n ac + c_n b) z}$$

$$= a_n + \frac{\frac{b_n a}{1-c_n a} + \frac{b_n (b-ca)}{1-c_n a} z}{1 - (c + \frac{c_n b}{1-c_n a}) z}$$

ويمكن كتابة هذه العلاقة في الصورة التالية:

$$a_n + \frac{x + yz}{1 - wz}$$

ولكن نريدها في الصورة التالية:

$$a_{n+1} + \frac{a_{n+1} z}{1 - c_{n+1} z}$$

ومن ثم نأخذ:

$$c_{n+1} = w = c + \frac{c_n b}{1 - c_n a} ،$$

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= y + xw \\ &= \frac{b_n (b - ac)}{1 - c_n a} + \frac{b_n ac}{1 - c_n a} + \frac{b_n c_n ba}{(1 - c_n a)^2} \\ &= \frac{b_n b(1 - c_n a) + b_n c_n ba}{(1 - c_n a)^2} \\ &= \frac{b_n b}{(1 - c_n a)^2} \end{aligned}$$

وأن:

$$a_{n+1} = a_n + x = a_n + \frac{b_n a}{1 - c_n a}$$

ومن ثم نحصل على $g_{n+1}(z)$ في الصيغة المطلوبة.

٢- حيث إن $b=0.4$ ، $c=0.2$ ، إذن $a=\dfrac{1-0.4-0.2}{1-0.2}=0.5$ ، وحيث إن $b=0.4\le 0.64=0.8^2=(1-c)^2$ إذن $u_\infty=1$. و لدينا أيضاً:

$$g(z)=a+\frac{b\,z}{1-c\,z}=0.5+\frac{0.4\,z}{1-0.2\,z}$$

وبوضع $z=\beta\,g(z)$ ، نحصل على:

$$0.2\,z^2-(1-0.4\beta)\,z+0.5\,\beta=0$$

ومن ثم فإن:

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= \frac{1-0.4\beta\pm\sqrt{(1-0.4\,\beta)^2-0.4\,\beta}}{0.4} \\ &= 2.5-\beta\pm\frac{1}{0.4}\sqrt{1+0.16\,\beta^2-1.2\beta} \end{aligned}$$

ومن ثَم فإن:

$$F(\beta)=2.5-\beta-\frac{1}{0.4}\sqrt{1+0.16\,\beta^2-1.2\beta}$$

مثال (١١,١١)

لنفرض أن مجتمعاً من الجزيئات النووية كل جزيءٍ فيه يمكن أن يتسبب في تخليق ثلاث جزيئات باحتمال p عندما يصطدم. وأنه يمكن أن ينتقل خارج النظام بدون أن يصطدم باحتمال $q=1-p$. إذا تزايدت الجزيئات إلى عدد غير منتهٍ فإنها ستحدث انفجاراً، وبخلاف ذلك فإن العملية حتماً ستنتهي. ونريد حساب احتمالِ الانفجار عندما يكون $p=0.4$ وكان المجتمع الأولي يتكون من جزيء واحد. لدينا:

$$\begin{aligned} g(z)=E\left[z^{Y_{ni}}\right] &= \sum_{j=0}^{\infty} z^{Y_{ni}}\,P(Y_{ni}=j)p\,z^3+q \\ &= z^0 P(Y_{ni}=0)+z^3 P(Y_{ni}=3) \end{aligned}$$

ومن ثَم فإن:

$$g(z) = p z^3 + q$$

ومن ثم فإن، المعادلة $z = g(z)$ تكافئ المعادلة التالية:

$$(z-1)\left(p z^2 + p z - q\right) = 0$$

يمكن الحصول على جذور هذه المعادلة والتي تختلف عن الواحد في الصورة التالية:

$$\frac{-p \pm \sqrt{p^2 + 4pq}}{2p}$$

ومن ثم فإن الحلول غير السالبة للمعادلة $z = g(z)$ هي:

$$1 \text{ ،} \frac{-p + \sqrt{p^2 + 4pq}}{2p}$$

ومن ثَم فإن احتمال الانقراض u_∞ يكون عبارة عن القيمة الصغرى بين الجذرين. ومن ثم فإنه عندما $p = 0.4$ نحصل على:

$$u_\infty = \frac{-0.4 + \sqrt{1.12}}{0.8} = 0.823$$

(١١,٦) تمارين

(١١,١) وضح كيفية الحصول على المعادلة (١١,٥) من المعادلتين (١١,٣)، (١١,٤)، عندما $X_0 = 1$.

(١١,٢) إذا كان مجتمع ما بدأ بفرد واحد. وفي كل جيل يمكن أن يموت أي فرد باحتمال $\frac{1}{2}$، أو يُزدوج باحتمال $\frac{1}{2}$. ليكن X_n يشير إلى تعداد الأفراد في الجيل رقم n. أوجد متوسط وتباين X_n.

(١١,٣) بفرض أن عدد ذرية شخص ما في مجتمع ما يمكن أن يكون 0، 1 أو 2 بالاحتمالات $a > 0$، $b > 0$، $c > 0$، حيث $a + b + c = 1$. صغ متوسط وتباين توزيع الذرية بدلالة b, c.

(١١,٤) عند كل مرحلة في معدد الإلكترون، فإن كل إلكترون، بمجرد أن يضرب الحاجز المستوي، يتسبب في توليد عددا من الإلكترونات بناء على عملية بواسون بالمتوسط.

احسب متوسط وتباين عدد الإلكترونات في المرحلة رقم n.

(١١,٥) أوجد الدالة المولدة لاحتمالات توزيع الذرية والتي فيها يمكن لأي شخص إما أن يموت باحتمال p_0 أو يُنتج ولدين باحتمال p_2، حيث إن $p_0 + p_2 = 1$.

(١١,٦) أوجد الدالة المولدة لاحتمالات توزيع الذرية في مجتمع يمكن لأي شخص إما ألاّ يكون له نسل باحتمال p أو يكون له عدد N من الأبناء باحتمال q، حيث إن $p+q=1$.

(١١,٧) لنفرض أن $g(z)$ تشير إلى دالة توزيع المتغير العشوائي Y_{ni} والذي يرمز إلى ذرية الفرد رقم i في الجيل رقم n. وليكن V عبارة عن متغير عشوائي له توزيع المتغير Y_{ni}، ولكن بشرط أن $Y_{ni} > 0$. أي أن:

$$P(V = k) = P(Y_{ni} = k \mid Y_{ni} > 0), k = 0,1,2,\cdots$$

صغ الدالة المولدة لاحتمالات المتغير العشوائي V بدلالة g.

(١١,٨) لنفرض منطقة كبيرة مجزأة إلى مناطق جزئية متعددة. كل منطقة جزئية تحتوي على عملية تفرع والتي توصف بعملية بواسون بالمعلمة λ. ولنفرض أن قيمة λ تتغير مع كل منطقة جزئية، وتوزيعها على المنطقة كلها هو توزيع جاما. أي أنه بفرض أن توزيع الذرية يعطى بالعلاقة.

$$\pi(k \mid \lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, k = 0,1,2,\cdots$$

حيث λ يكون عبارة عن متغير عشوائي بدالة الكثافة الاحتمالية التالية:

$$f(\lambda) = \frac{\theta^\alpha \lambda^{\alpha-1} e^{-\theta\lambda}}{\Gamma(\alpha)}, \lambda > 0$$

حيث إن α، θ ثوابت موجبة. أوجد التوزيع الهامشي للذرية $p_k = \int \pi(k \mid \lambda) f(\lambda)\, d\lambda$.

(١١,٩) ليكن $g(z) = 1 - p(1-z)^\beta$، حيث إن p, β ثوابت تحقق أن $0 < p < \beta < 1$. أثبت أن $g(z)$ تكون دالة مولدة للاحتمال وتحقق العلاقة

التكرارية التالية:

$$g(z)=1-p^{1+\beta+\cdots+\beta^n}(1-z)^{\beta^n},\ n=1,2,\cdots$$

(١١,١٠) لنفرض أن الوالدين يمكن ألاّ يكون لهما ذرية باحتمال $\frac{1}{2}$، أو يكون لها ذرية من فردين باحتمال $\frac{1}{2}$. فإذا كان مجتمع من هذا النوع قد بدأ بأصل أولي وحيد ويتطور كعملية تفرع، احسب u_n، واحتمال انقراض المجتمع بحلول الجيل رقم n.

(١١,١١) وضح أن تركيب كل من الكسور الخطية $f(z)=\frac{\alpha+\beta z}{\gamma+\delta z}$، $g(z)=\frac{a+bz}{c+dz}$ يكون أيضًا كسوراً خطية. تحقق من أن تركيب الدالة f مع نفسها يأخذ الصورة التالية:

$$f(f(z))=\frac{\alpha(\gamma+\beta)+(\alpha\delta+\beta^2)z}{\alpha\delta+\gamma^2+\delta(\gamma+\beta)z}$$

(١١,١٢) بفرض عملية تفرع بذرية تتبع التوزيع الهندسي بدالة الكتلة الاحتمالية $p_k=(1-c)c^k$، $k=0,1,2,\cdots$، حيث $0<c<1$. وضح أن احتمال الانقراض الحتمي يعطى بالعلاقة:

$$u_\infty=\frac{1-\sqrt{1-4c(1-c)}}{2c!},\ \frac{1}{2}<c\le 1$$

المراجع

Berger, M.A. *An Introduction to Probability and Stochastic Processes.* New York, NY: Springer-Verlag, 1993.

Bhat, N. *Elements of Applied Stochastic Processes*. 2nd ed., New York, NY: Springer-Verlag, 1985.

Breiman, L. *Probability and Stochastic Processes with a View Toward Applications*. Boston, MA: Houghton Mifflin, 1969.

Cinlar, E. *Introduction to Stochastic Processes*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1976.

Clarke, A.B. and Disney, R.L. *Probability and Random Processes: A First Course with Applications*, 2nd ed., New York, NY: Springer-Verlag, 1985.

Cox, D.R. and Miller, H.D. *The Theory of Stochastic Processes*. London: Methuen, 1965.

Dynkin, E.B. and Yushkevich, A.A. *Markov Processes: Theorems and Problems*. New York, NY: Plenum, 1969.

Feller, W. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications.* 2 Vols., New York, NY: John Wiley and Sons, 1968.

Gallager, R.G. *Discrete Stochastic Processes*. Boston, MA: Kluwer Academic Publishing, 1996.

Harris, T. *The Theory of Branching Processes*. Berling: Springer-Verlag, 1963.

Higgins, J.J. and Keller-McNulty, S. *Concepts in Probability and Stochastic Modelling.* Belmont, CA: Duxbury Press, 1995.

Hoel, R.G.; Port, S.C. and Stone, C.J. *An Introduction to Stochastic Processes*. Boston, MA: Houghton Mifflin, 1972.

Isaacson, D. and Madsen, R. *Markov Chains Theory and Applications*. New York, NY: John Wiley and Sons, 1976.

Kao, E.P.C. *An Introduction to Stochastic Processes*. Belmont, CA: Duxbury Press, 1997.

Karlin, S. and Taylor, H. *A First Course in Stochastic Processes*, 2nd ed., Orlando, FL: Academic Press, 1975.

Kemeny, J.; Snell, L. and Knapp, *A. Denumerable Markov Chains*. Van Nostrand, 1966.

Minh, D.L. *Applied Probability Models*. Pacific Grove, CA: Duxbury Press, 2001.

Papoulis, A. *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*, 3rd ed., New York, NY: McGraw-Hill, 1991.

Parzen, E. *Stochastic Processes*. San Francisco, CA: Hodeln-Day, 1962.

Prabhu, N.U. *Stochastic Processes*. New York, NY: Macmillan, 1965.

Resnick, S.I. *Adventures in Stochastic Processes*. Boston, MA: Birkhauser, 1992.

Ross, S.M. *Stochastic Processes*. New York, NY: John Wiley and Sons, 1983.

Ross, S.M. *Introduction to Probability Models*, 2nd ed., New York, NY: Academic Press, 1981.

Ross, S.R. *Applied Probability Models with Optimization Applications*. San Francisco, NY: Holden-Day, 1970.

Sheynin, O.B. *Markov's Work on Probability*. Archive for History of Exact Sciences, Vol. 39, 337-377, 1988.

Taylor, H.M. and Kerlin, S. *An Introduction to Stochastic Modeling*. Revised Edition, San Diego, CA: Academic Press, 1994.

Tijms, H.C. *Stochastic Models: An Algorithmic Approach*. New York, NY: John Wiley and Sons, 1998.

Yates, R.D. and Goodman, D.J. *Probability and Stochastic Processes*. New York, NY: John Wiley and Sons, 1999.

Zikun, W. and Xiangqun, Y. *Birth and Death Processes and Markov Chains*. New York, NY: Springer-Verlag, 1992.

ثبت المصطلحات العلمية

أولاً: عربي – إنجليزي

أ

ابتدائي	Initial
اتصال	Communication
إجراء	Procedure
احتمال	Probability
احتمالي	Probabilistic
إحصاء	Statistics
إخفاق	Failure
أداء	Performance
ارتدادية	Recurrent
إيرلنج	Erlang
أسي	Exponential
إفادة	Utilization
أمامي	Forward
امتصاص	Absorption
انتظار	Waiting

انتقال	Transition
انتقالي	Transient
انقراض	Extinction
أول	First
إيرلنج	Erlang

ب

بحوث عمليات	Operations research
برنوللي	Bernoulli
بواسون	Poisson

ت

تباين	Variance
تجديد	Renewal
تجربة	Experiment
تحكم	Control
تدفق	Flow
تزايدي	Increasing
تصليح	Repair
تصنيف	Classification
تفاضلي	Differential
تفرع	Branching

Decomposition	تفكك
Asymptotic	تقاربي
Estimate	تقدير
Application	تطبيق
Equivalence	تكافؤ
Frequency	تكرار
Definition	تعريف
Decreasing	تناقصي
Prediction	تنبؤ
Balance	توازن
Parallel	توازي
Series	توالي
Distribution	توزيع

ج

Gamma	جاما
Table	جدول
Bulk	جماعي
Generation	جيل

ح

Barrier	حاجز
Event	حادثة

Computer	حاسب
State	حالة
Solution	حل
Size	حجم

خ

Server	خادم
Property	خاصية
Pure	خالص
Service	خدمة
Step	خطوة
Linear	خطي
Backward	خلفي
Successor	خليفة
Algorithm	خوارزمية

د

Function	دالة
Degree	درجة
Period	دورة
Periodic	دورية

ذ

ذرية	Offspring
ذو الحدين	Binomial

ر

رسم	Graph

ز

زبون	Customer
زلزال	Earthquake
زمن	Time
زهرة نرد	Die
زيادة	Increment

س

سلسلة	Chain
سليم	Non-defective

ش

شدة	Intensity
شبك	Network
شرط	Condition

ص

صحيح	Integer
صف (طابور)	Queue
صف (مصفوفة)	Row
صفري	Null
صلاحية	Availability
صورة	Head
صيانة	Maintenance
صيغة	Form

ض

ضروري	Necessary

ط

طريقة	Method

ع

عاكسة	Transitive
عائلة	Family
عد	Count

Stochastic	عشوائي
Loop	عروة
Node	عقدة
Relation	علاقة
Coin	عملة معدنية
Process	عملية
Column	عمود
Element	عنصر
Return	عودة
Sample	عينة

غ

Aperiodic	غير دوري
Non-homogeneous	غير متجانس
Irreducible	غير مختزل
Non-stationary	غير مستقر
Infinite	غير منته

ف

Rat	فأر
Branch	فرع
Failure	فشل
Difference	فرق

فصل	Class
فضاء	Space
فقدان الذاكرة	Memoryless

ق

قطر	Diagonal
قوس	Arc
قيمة ذاتية	Eigenvalue

ك

كتابة	Tail

م

ماركوف	Markov
ماصة	Absorbing
مدينة	Town
متاهة	Maze
متتابعة	Sequence
متجانس	Homogeneous
متطابق	Identical
متجه	Vector
متجه ذاتي	Eigenvector
متعدي	Transitive
متغير	Variable

Continuous	متصل
Symmetric	متماثل
Mean	متوسط
Expected	متوقع
Population	مجتمع
Trail	محاولة
Determinant	محددة
Reducible	مختزل
Dependent	مرتبط
Compound	مركب
Passage	مرور
Path	مسار
Absorbing	مستحوذة
Independent	مستقل
Stationary	مستقر
Ergodic	مسرانية
Behavior	مسلك
Observation	مشاهدة
Walk	مشي
Matrix	مصفوفة
Factor	معامل
Rate	معدل

Parameter	معلمة
Defective	معيب
Departure	مغادرة
Closed	مغلق
Open	مفتوح
Measure	مقياس
Accessible (Reachable)	ممكن
Uniform	منظم
Discrete	منفصل
Positive	موجب
Reliability	موثوقية
Position	موقع

ن

Result	نتيجة
Success	نجاح
System	نظام
Theorem	نظرية
Point	نقطة
Model	نموذج
Limiting	نهائي
Type	نوع

هـ

هامشي	Marginal
هندسي	Geometric
هندسي فوقي	Hyper geometric

و

وايبل	Weibull
وحيد	Unique
وصول	Arrival
وفاة	Death
وقت	Time
ولادة	Birth

ي

يول	Yule

ثانياً: إنجليزي – عربي

A

Absorbing	ماصة (مستحوذة)
Absorption	امتصاص
Accessible (Reachable)	ممكن
Algorithm	خوارزمية
Aperiodic	غير دوري
Application	تطبيق
Arc	قوس
Arrival	وصول
Asymptotic	تقاربي
Availability	صلاحية

B

Backward	خلفي
Balance	توازن
Barrier	حاجز
Behavior	مسلك
Bernoulli	برنوللي
Binomial	ذو الحدين
Birth	ولادة
Branch	فرع

Branching	تفرع
Bulk	جماعي

C

Chain	سلسلة
Class	فصل
Classification	تصنيف
Closed	مغلق
Coin	عملة معدنية
Column	عمود
Communication	اتصال
Compound	مركب
Computer	حاسب
Condition	شرط
Continuous	متصل
Control	تحكم
Count	عد
Customer	زبون

D

Death	وفاة
Decomposition	تفكك
Decreasing	تناقصي

Defective	معيب
Definition	تعريف
Degree	درجة
Departure	مغادرة
Dependent	مرتبط
Determinant	محددة
Diagonal	قطر
Die	زهرة نرد
Difference	فرق
Differential	تفاضلي
Discrete	منفصل
Distribution	توزيع

E

Earthquake	زلزال
Eigenvalue	قيمة ذاتية
Eigenvector	متجه ذاتي
Element	عنصر
Equivalence	تكافؤ
Ergodic	مسرانية
Erlang	إيرلنج
Estimate	تقدير
Event	حادثة

Expected	متوقع
Experiment	تجربة
Exponential	أسي
Extinction	انقراض

F

Factor	معامل
Failure	إخفاق (فشل)
Family	عائلة
First	أول
Flow	تدفق
Form	صيغة
Forward	أمامي
Frequency	تكرار
Function	دالة

G

Gamma	جاما
Generation	جيل
Geometric	هندسي
Graph	رسم

H

Head	صورة

Homogeneous	متجانس
Hyper geometric	فوق هندسي

I

Identical	متطابق
Increasing	تزايدي
Increment	زيادة
Independent	مستقل
Infinite	غير منته
Initial	ابتدائي
Integer	صحيح
Intensity	شدة
Irreducible	غير مختزل

L

Limiting	نهائي
Linear	خطي
Loop	عروة

M

Maintenance	صيانة
Marginal	هامشي
Markov	ماركوف

Matrix	مصفوفة
Maze	متاهة
Mean	متوسط
Measure	مقياس
Memoryless	فقدان الذاكرة
Method	طريقة
Model	نموذج

N

Necessary	ضروري
Network	شبك
Node	عقدة
Non-defective	سليم
Non-homogeneous	غير متجانس
Non-stationary	غير مستقر
Null	صفري

O

Observation	مشاهدة
Offspring	ذرية
Open	مفتوح

Operations research	بحوث عمليات

P

Parallel	توازي
Parameter	معلمة
Passage	مرور
Path	مسار
Performance	أداء
Period	دورة
Periodic	دورية
Point	نقطة
Poisson	بواسون
Population	مجتمع
Position	موقع
Positive	موجب
Prediction	تنبؤ
Probabilistic	احتمالي
Probability	احتمال
Procedure	إجراء
Process	عملية
Property	خاصية
Pure	خالص

Q

Queue	صف (طابور)

R

Rat	فأر
Rate	معدل
Recurrent	ارتدادية
Reducible	مختزل
Relation	علاقة
Reliability	موثوقية
Renewal	تجديد
Repair	تصليح
Result	نتيجة
Return	عودة
Row	صف (مصفوفة)

S

Sample	عينة
Sequence	متتابعة
Series	توالي
Server	خادم
Service	خدمة
Size	حجم

Solution	حل
Space	فضاء
State	حالة
Stationary	مستقر
Statistics	إحصاء
Step	خطوة
Stochastic	عشوائي
Success	نجاح
Successor	خليفة
Symmetric	متماثل
System	نظام

T

Table	جدول
Tail	كتابة
Theorem	نظرية
Time	زمن
Time	وقت
Town	مدينة
Trail	محاولة
Transient	انتقالي
Transition	انتقال

Transitive	عاكس (متعدي)
Type	نوع

U

Uniform	منظم
Unique	وحيد
Utilization	إفادة

V

Variable	متغير
Variance	تباين
Vector	متجه

W

Waiting	انتظار
Walk	مشي
Weibull	وايبل

Y

Yule	يول

كشاف الموضوعات

ردمك : ٢- ١٣٤- ٥٥- ٠٩٩٦٠
ISBN: 9960-55-134-2